Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVII, № 3

МАТЕМАТИКА

Ю. С. БОГДАНОВ

О НОРМАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ЛЯПУНОВА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 27 I 1947)

Характеристичным числом функции $f(t)$ (х. ч. $f(t)$) называется точная нижняя граница чисел λ, для которых

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, e^{\lambda t} f(t) = +\infty.$$

Если множество $\{\lambda\}$ неограничено снизу, то полагают

$$\text{х. ч. } f(t) = -\infty,$$

и, наоборот, если для любого λ

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\, e^{\lambda t} f(t) < +\infty,$$

то считают

$$\text{х. ч. } f(t) = +\infty.$$

Характеристичным числом совокупности функций называется наименьшее из характеристичных чисел функций, входящих в эту совокупность.

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX}{dt} = XP. \tag{1}$$

Если элементы матрицы $P = \{P\}_{ik}$ непрерывны и ограничены в промежутке (t_0, ∞), то характеристическое число всякого, отличного от тривиального, решения

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где n — порядок матрицы X, всегда конечно.

Нормальной системой решений системы (1) называется фундаментальная система решений такого свойства, что всякая линейная комбинация всех входящих в ее состав решений будет обладать характеристичным числом, равным характеристическому числу совокупности комбинируемых решений. Такая система всегда существует.

1. Пусть X_1 — нормальная система решений системы (1). Всякая другая фундаментальная система решений системы (1) X_2 может быть получена умножением X_1 на некоторую матрицу C .

$$X_2 = CX_1, \quad C = \text{const}, \quad D(C) \neq 0. \tag{1,1}$$

В этом параграфе мы установим, какими свойствами должна обладать матрица C, чтобы X_2 была снова нормальной системой решений.

Обозначим через λ_i характеристичное число i-го решения из нормальной системы решений X_1

$$\lambda_i = \text{х. ч. } x_i^{(1)} = \text{х. ч. } \left(x_{i1}^{(1)}, x_{i2}^{(2)}, \ldots, x_{in}^{(n)}\right)$$

и через λ_i' — характеристичное число i-го решения из X_2.

Лемма. *Для того чтобы фундаментальная система решений была нормальной системой решений, необходимо и достаточно совпадение множеств*

$$\{\lambda_i\}_{i=1,2,\ldots,n} \quad \text{и} \quad \{\lambda_i'\}_{i=1,2,\ldots,n}.$$

Ляпунов ([1]) доказал, что необходимым и достаточным признаком нормальной системы является достижение $\max \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

Отсюда и из определения нормальной системы решений и следует лемма.

Пусть n_i — число решений нормальной системы решений системы (1) с характеристичными числами, не меньшими, чем λ_i. Не умаляя общности, можно считать, что матрицы X_1 и X_2 записаны так, что

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n, \quad \lambda_1' \geqslant \lambda_2' \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n'.$$

Условившись о таком порядке записи, формулируем теорему.

Теорема. *Для того чтобы матрица C переводила нормальную систему решений X_1 в нормальную же систему решений X_2, необходимо и достаточно*

$$\begin{gathered} 1.\ D(C) \neq 0. \\ 2.\ \{C\}_{ik} = C_{ik} = 0 \text{ для } k > n_i. \end{gathered} \tag{1,2}$$

Доказательство. Достаточность.

$$x_i^{(2)} = c_{i1} x_1^{(1)} + \ldots + c_{ii} x_i^{(1)} + \ldots + c_{in_i} x_{n_i}^{(1)}.$$

Среди коэффициентов $c_{in_j+1}, \ldots, c_{ii}, \ldots, c_{in_i}$ $(\lambda_j > \lambda_i, \lambda_{j+1} = \lambda_i)$ имеются отличные от 0 (иначе $D(C) = 0$).

Так как X — нормальная система решений и $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$, то $\lambda_i' = \lambda_i$. По лемме следует: X_2 — нормальная система решений

Необходимость.

$$x_i^{(2)} = c_{i1} x_1^{(1)} + c_{i2} x_2^{(1)} + \ldots + c_{in} x_n^{(1)}.$$

По лемме должно быть (при нашем порядке записи)

$$\lambda_i' = \text{х. ч. } x_i^{(2)} = \lambda_i.$$

Вследствие этого, так как X_1 — нормальная система решений, $c_{ik} = 0$ для $k > n_i$.

Теорема доказана.

Итак, из всей группы (относительно умножения в обычном для матриц смысле) матриц C $(D(C) \neq 0)$ — $\mathfrak{C}$, преобразующих одну фундаментальную систему решений системы (1) в другую фундаментальную систему решений, выделяется подгруппа матриц $\overline{\mathfrak{C}}$ вида (1,2), переводящих нормальную систему решений снова в нормальную систему решений.

2. Матрица начальных значений фундаментальной системы решений уравнения (1).

$$X_0 = X|_{t=t_0} \tag{2,1}$$

содержит n^2 параметров. Установим вид матрицы X_0 в том случае, когда X — нормальная система решений.

Пусть Y — некоторая нормальная система решений системы (1) с матрицей начальных значений Y_0

$$Y_0 = Y\,|_{t=t_0}, \quad D(Y_0) \neq 0.$$

Тогда всякая другая нормальная система решений системы (1), согласно теореме § 1, имеет вид

$$X = CY, \tag{2,2}$$

где C удовлетворяет условию (1,2).

Положив $t = t_0$, имеем

$$X_0 = CY_0. \tag{2,3}$$

Из этого соотношения следует, прежде всего, что матрица начальных значений X_0 содержит лишь следующее число параметров: $n^2 + m_1^2 + \ldots + m_{k-1}^2 - m_1 m_2 - \ldots - m_{k-1} m_k$; при этом считаем, что

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{m_1} > \lambda_{m_1+1} = \ldots = \lambda_{m_2} > \lambda_{m_2+1} \ldots \lambda_{m_k} (= \lambda_n).$$

В частности, если все характеристичные числа системы (1) различны, то число параметров будет $\frac{n(n+1)}{2}$.

Из (2,3) следует, что в n-мерном пространстве $\{(x_1, \ldots, x_n)\}$ все начальные при $t = t_0$ значения любого решения нормальной системы решений, обладающего характеристичным числом λ_{m_j+p}, лежат в некоторой, для данной системы (1) и значения t_0 определенной, m_{j+1}-мерной гиперплоскости, проходящей через начало.

Полученная таким образом совокупность гиперплоскостей сплошь заполняется начальными значениями решений из нормальной системы решений системы (1). Взяв n линейно независимых точек так, что

m_1	точек	расположены	в соответственной	m_1	-мерной	гиперплоскости
$m_2 - m_1$	«	«	«	m_2	«	«
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
$m_k - m_{k-1}$	«	«	«	«	«	«

и так, что определитель, им соответствующий, отличен от нуля, мы получаем нормальную систему решений, начальные значения которой и будут выбранные точки. Всякая из указанных выше гиперплоскостей содержит предыдущие.

В некоторых случаях положение рассматриваемой совокупности гиперплоскостей не зависит от t_0. Так будет, очевидно, в случае, когда $P = \text{const}$. Это следует из общего вида нормальной системы решений

$$X = Ce^{It} S,$$

где $I = SPS^{-1}$ — канонический вид матрицы P, записанный так, что $\operatorname{Re}(l_i) \leqslant \operatorname{Re}(l_j)$, $i < j$, l_i, l_j — характеристические числа P, а C выбрано согласно условию (1,2).

В общем же случае при переходе от t_0 к $t_1 \neq t_0$ положение гиперплоскостей может изменяться, хотя размерности их остаются прежними, равно как и факт прохождения через начало.

Ленинградский государственный
университет

Поступило
27 I 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, 1945.