Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVII, № 3

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР П. АЛЕКСАНДРОВ

ГОМОЛОГИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В ОБЛАСТЯХ ДВОЙСТВЕННОСТИ *

1. Постановка вопроса. Под областью двойственности мы понимаем всякую совокупность $\mathfrak{S}$ множеств, лежащих в сферических пространствах S^n любого числа измерений n, обладающую следующими свойствами:

1°. Если $A \in \mathfrak{S}$ и A' гомеоморфно множеству A, то и $A' \in \mathfrak{S}$.

2°. Если $A \in \mathfrak{S}$, $A \subset S^n$ и $B = S^n - A$, то и $B \in \mathfrak{S}$.

В настоящей заметке для каждого $m = 2, 3, 4, \ldots$ будет построена область двойственности $\mathfrak{D}_m$, обладающая следующими свойствами:

1°. Для любого $A \in \mathfrak{D}_m$ группы Бетти $\Delta_c^p A$ (с компактными носителями, по модулю m)** конечны для любого p.

2°. Если A и B взаимно дополнительные множества данного S^n, $A \in \mathfrak{D}_m$, $B \in \mathfrak{D}_m$ и $p + q = n - 1$, то имеет место изоморфизм

$$\Delta_c^p A = \Delta_c^q B, \tag{1}$$

являющийся понтрягинским „изоморфизмом двойственности" ((2), стр. 174), причем скалярное произведение для $\mathfrak{z}_A^p \in \Delta_c^p A$, $\mathfrak{z}_B^q \in \Delta_B^q B$ есть коэффициент зацепления $\mathfrak{v}(\mathfrak{z}_A^p, \mathfrak{z}_B^q)$.

3°. В области $\mathfrak{D}_m$ в качестве элементов содержатся, в частности, все конечно связные по модулю m (т. е. имеющие конечные группы Бетти) конечномерные компакты и все ошкурённые полиэдры (под ошкурённым полиэдром понимается любое точечное множество какого-либо S^n, являющееся суммой конечного числа попарно непересекающихся открытых симплексов любых размерностей; совокупность всех ошкуренных полиэдров данного S^n может быть определена как наименьшая совокупность множеств, содержащая все выпуклые многогранники данного S^n и замкнутая по отношению к конечному сложению и вычитанию).

Построению областей двойственности $\mathfrak{D}_m$ будет предшествовать установление двойственности $\Delta_c^p A \mid \Delta_c^p B$ для достаточно широкого (содержащего, в частности, все ошкурённые полиэдры) топологически инвариантного класса всех так называемых гомологических ретрактов A, причем областью коэффициентов для A является произвольная дискретная группа $\mathfrak{A}$, а для B — бикомпактная группа $\mathfrak{B} \mid \mathfrak{A}$.

2. Естественный гомоморфизм группы $\Delta_c^q A$ в группу $\delta^p A$. Пусть $\sigma_\alpha = \{o_{\alpha i}\}$ — покрытие множества A (в смысле, установленном в (1)). Каждый компакт $\varphi \subseteq A$ пересекается лишь с конечным числом

* Обозначения и терминология — как в (1).
** Т. е., если взять за область коэффициентов циклическую группу Π_m порядка m.

элементов $o_{\alpha_i} \in \sigma_\alpha$ и выделяет таким образом из покрытия σ_α конечную подсистему непустых множеств $\varphi \cap o_{\alpha_i}$, покрывающих φ; эту подсистему и ее нерв будем обозначать через $\varphi\sigma_\alpha$, причем $\varphi \cap o_{\alpha_i}$ и $\varphi \cap o_{\alpha_j}$ считаются различными элементами системы $\varphi\sigma_\alpha$, если o_{α_i} и o_{α_j} различны.

Проекционный цикл $z = \{z_\alpha\}$ множества A называется лежащим на компакте φ, если при любом α цикл z_α есть цикл нерва $\varphi\sigma_\alpha$, и при $\beta > \alpha$ имеем $\Omega_\alpha^\beta\, z_\beta \sim z_\alpha$ в $\varphi\sigma_\alpha$. Проекционный цикл множества A называется компактным, если существует компакт $\varphi \subseteq A$, на котором этот цикл лежит; проекционный цикл $z = \{z_\alpha\}$, лежащий на φ, гомологичен нулю на φ, если для любого α цикл z_α ограничивает на $\varphi\sigma_\alpha$. Компактный цикл множества A компактно ограничивает в A, если он ограничивает на некотором компакте $\varphi \subseteq A$. Фактор-группа группы всех компактных p-мерных циклов множества A по подгруппе всех компактно ограничивающих, как легко видеть, изоморфна группе $\Delta_c^p A$ и может быть с нею отождествлена.

Тождественное отображение группы всех компактных циклов в группу всех вообще проекционных циклов порождает естественный гомоморфизм группы $\Delta_c^p A$ в группу $\delta^p A$. Этот гомоморфизм — ввиду изоморфизма $\delta^p A = D^p A$ — можно рассматривать и как гомоморфизм группы $\Delta_c^p A$ в $D^p A$, получающийся, если рассматривать всякий истинный цикл множества A как скользящий и помнить, что если при этом истинный цикл компактно ограничивает в A, то он тем более ограничивает „вокруг A“, как скользящий цикл. Отсюда видно, что ядром естественного гомоморфизма группы $\Delta_c^p A$ в $\delta^p A$ является подгруппа $\Delta_1^p A$, элементы которой суть классы истинных циклов, гомологичных нулю во всякой окрестности множества A. Группа $\Delta_1^p A$ может быть определена, как состоящая из тех элементов группы $\Delta_c^p A$, коэффициент зацепления которых с любым истинным циклом множества B равен нулю. Из сказанного следует далее, что при всяком топологическом отображении множества $A \subset S^n$ на какое-нибудь $A' \subset S^{n'}$ всякий истинный цикл множества A, зацепленный с каким-либо истинным циклом множества $B = S^n - A$, переходит в истинный цикл множества A', зацепленный с некоторым истинным циклом множества $B' = S^{n'} - A'$.

3. Гомологические ретракты. Скажем, что множество A удовлетворяет условию r^p, или есть r^p-множество, если каждый истинный цикл z_A^p множества A, не ограничивающий компактно в A, не ограничивает и в некоторой (зависящей от z_A^p) окрестности множества A. Класс всех r^p-множеств топологически инвариантен, так как совпадает с классом тех A, для которых естественный гомоморфизм группы $\Delta_c^p A$ в $\delta^p A$ есть изоморфизм.

Множество A называется равномерным r^p-множеством, или ur^p-множеством, если существует такая окрестность λ множества A, что всякий истинный цикл, не ограничивающий компактно в A, не ограничивает и в λ. Докажем, что класс всех ur^p-множеств топологически инвариантен. Для этого покажем, что условие ur^p эквивалентно следующему сформулированному в топологически инвариантных терминах условию UR^p: существует такое покрытие σ_ω множества A, что всякий компактный проекционный цикл $z^p = \{z_\alpha^p\}$, для которого $z_\omega^p \sim 0$ в σ_ω, компактно ограничивает в A.

В самом деле, пусть условие UR^p выполнено. Берем покрытие σ_ω, указаное в условии UR^p, и следующее за этим покрытием покрытие

$\sigma'=\sigma'(\tau)$ с нервом $\varepsilon=\varepsilon(\tau)$ (см. ([1])). Без больших трудностей можно доказать, что открытое множество $\lambda'(\tau)$ может быть принято за λ условия ur^p. Обратно, если выполнено условие ur^p, то берем λ из этого условия и следующее за этим открытое множество $\lambda'=\lambda'(\tau)$ (см. ([1])), а также покрытие $\sigma'=\sigma'(\tau)$ с нервом $\varepsilon=\varepsilon(\tau)$. Это покрытие может быть принято за σ_ω условия UR^p.

Говорим, что A удовлетворяет условию a^p, или есть a^p-множество, если ко всякой окрестности λ множества A можно подобрать такую окрестность $\lambda'\supseteq A$, что всякий p-мерный цикл открытого множества λ' гомологичен в λ некоторому истинному циклу множества A. Свойство a^p топологически инвариантно, так как оно эквивалентно следующему свойству (A^p): каково бы ни было покрытие σ_ω множества A, можно найти такое покрытие $\sigma_{\omega'}$ того же множества, что для любого цикла $z^p_{\omega'}$ нерва $\sigma_{\omega'}$ можно найти компактный проекционный цикл $z^p=\{z_\alpha\}$, удовлетворяющий гомологии $\Omega^{\omega'}_{\omega} z^p_{\omega'}\sim z_\omega$ в σ_ω.

Пусть условие (A^p) выполнено. Докажем, что выполнено и условие a^p. Возьмем произвольное λ. Берем какую-нибудь триангуляцию τ открытого множества λ, комплекс $\varepsilon=\varepsilon(\tau)$ и покрытие $\sigma_\omega=\sigma'(\tau)$. К этому покрытию подбираем $\sigma_{\omega'}$ согласно условию (A^p) и берем триангуляцию τ', следующую за τ и такую, что $\sigma'(\tau')$ следует за $\sigma_{\omega'}$ и $\lambda'(\tau')$ содержится в $\lambda'(\tau)$ (для последнего условия достаточно, чтобы τ' следовало за двукратным барицентрическим подразделением триангуляции τ). Тогда $\lambda'(\tau')$ может быть принято за λ' условия a^p, которое, таким образом, оказывается выполненным. Пусть теперь дано, что A удовлетворяет условию a^p. Возьмем произвольное покрытие σ_ω. Без нарушения общности можно предположить, что σ_ω имеет вид $\sigma_\omega=\sigma'(\tau)$. К открытому множеству $\lambda=\lambda'(\tau)$ подбираем λ' согласно условию a^p. Возьмем триангуляцию τ', следующую за τ. Тогда покрытие $\sigma'(\tau')$ может быть принято за $\sigma_{\omega'}$ условия (A^p).

Множество A называется гомологическим ретрактом в размерности p по области коэффициентов $\mathfrak{A}$, если оно удовлетворяет условиям ur^p и a^p. Из доказанного следует, что класс гомологических ретрактов топологически инвариантен. Частным случаем гомологических ретрактов (в любой размерности и по любой области коэффициентов) являются обыкновенные окрестностные ретракты.

4. Условие (J^p); закон двойственности для гомологических ретрактов (обобщенная теорема Чогошвили ([3])). Мы скажем, что множество A удовлетворяет условию (J^p) относительно бикомпактной области коэффициентов $\mathfrak{B}$, если существует такой компакт $\varphi\subseteq A$, что всякий p-мерный истинный цикл множества A гомологичен в A некоторому истинному циклу компакта φ и если, кроме того, ко всякому компакту $\varphi_\alpha\subseteq A$ можно подобрать компакт φ_β так, что $\varphi_\alpha\subseteq\varphi_\beta\subseteq A$ и что всякий истинный цикл компакта φ_α, ограничивающий в A, ограничивает в φ_β. Это условие, очевидно, топологически инвариантно.

Без труда доказывается предложение:

Теорема 1. *Если из двух взаимно-дополнительных в S^n множеств A и B первое удовлетворяет условиям r^p и a^p, то каждый p-мерный истинный цикл множества A (по области коэффициентов $\mathfrak{A}$) или компактно ограничивает в A, или зацеплен с некоторым истинным циклом множества B, а каждый q-мерный истинный цикл множества B (по области коэффициентов $\mathfrak{B}$) или компактно* *ограничивает в B, или зацеплен с некоторым истинным циклом множества A.*

Пусть $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}=\Pi_m$. Из теоремы 1 следует, что в условиях этой теоремы $\Delta_0^p A=\Delta_1^p A=0$, $\Delta_0^q B=\Delta_1^q B=0$, так что общий закон двойственности приобретает вид $\delta^p A \mid \overline{\Delta_c^q} B$, $\delta^q B \mid \overline{\Delta_c^p} A$, где горизонтальная черта означает переход к бикомпактному замыканию соответствующих групп. Если же при этом группа $\delta^p A$ конечна, то $\Delta_c^p A \subseteq \delta^p A=\Delta_c^q B \subseteq$ $\subseteq \delta_c^q B=\Delta_c^p A$, т. е. $\delta^p A=\Delta_c^p A=\Delta_c^q B=\delta_c^q B$.

Пусть A — гомологический ретракт в разномерсти p по любой области коэффициентов $\mathfrak{A}$. Легко доказывается, что тогда основной гомоморфизм группы $\Delta_c^p A$ в группу $\delta^p A$ есть изоморфизм на группу $\delta^p A$, так что имеем $\Delta_c^p \overline{A \mid \Delta_c^q} B$ (справа — область коэффициентов $\mathfrak{B}$). Также легко доказывается, что в наших предположениях о множестве A множество B удовлетворяет условию (J^q), из чего в свою очередь следует, что группа $\Delta_c^q B=\Delta'^q_c B$ с топологией, введенной в ([1]),— бикомпактна и, значит, совпадает с $\overline{\Delta_c^q} B$. Этими рассуждениями (анвалогичными тем, что в ([3]) употребляет Г. С. Чогошвили) доказана теорема:

Закон двойственности для гомологических ретрактов. *Если A — гомологический ретракт в размерности p по области коэффициентов $\mathfrak{A}$, то (беря в B область коэффициентов $\mathfrak{B}$) имеем двойственность*

$$\Delta_c^p A \mid \Delta_c^q B. \tag{2}$$

Эта теорема, являясь обобщением соответствующей теоремы Чогошвили, с другой стороны, содержит в себе:

Закон двойственности для ошкурённых полиэдров. *Если A — топологический образ ошкурённого полиэдра, то имеет место двойственность* (2) (*для любой размерности p и любых областей коэффициентов — дискретной $\mathfrak{A}$ для A и бикомпактной $\mathfrak{B}$ для B*).

Последнее предложение следует из того, что все ошкурённые полиэдры являются (в любой размерности и по любой области коэффициентов) гомологическими ретрактами и что класс гомологических ретрактов обладает топологической инвариантностью.

Пусть $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}=\Pi_m$. Назовем двусторонним гомологическим ретрактом по модулю m всякое множество A, являющееся в любой размерности гомологическим ретрактом и удовлетворяющее (также для любого p) условию J^p (всё — по области коэффициентов Π_m). Без большого труда доказывается, что дополнение к двустороннему гомологическому ретракту также является двусторонним гомологическим ретрактом: что группы $\Delta_c^p A$ для двустороннего гомологического ретракта конечны и что все ошкурённые полиэдры являются при любом m двусторонними гомологическими ретрактами по модулю m. Обозначая через $\mathfrak{D}_m$ множество всех двусторонних гомологических ретрактов (относительно Π_m) и замечая, что все конечносвязные по модулю m компакты содержатся как элементы в $\mathfrak{D}_m$, видим, что $\mathfrak{D}_m$ является областью двойственности, удовлетворяющей поставленным в начале этой заметки требованиям.

Поступило
19 V 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. Александров, ДАН, **57**, № 2 (1947). [2] L. Pontrjagin, Math. Ann., **105**, 165 (1931). [3] G. Chogoshvili, C. R., **221**, 15 (1945).