Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 8

МАТЕМАТИКА

Б. ЛЕВИТАН

ОБОБЩЕННЫЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫЕ И ОБОБЩЕННЫЕ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 24 VI 1947)

1. Понятие базиса непрерывных функций, введенное в нашей предыдущей заметке ([1]), легко переносится на континуальный случай. При этом следует всюду суммы заменить на интегралы Стильтьеса. Мы ограничимся в настоящей заметке рассмотрением важного примера, связанного с оператором Штурма — Лиувилля второго порядка.

Пусть $L(\varphi)=\frac{d^2\varphi}{dx^2}-\rho(x)\varphi$, где $\rho(x)$ — непрерывная для всех действительных x действительная функция. Обозначим через $\varphi(x, \lambda)$ решение дифференциального уравнения

$$L(\varphi)+\lambda\varphi=0 \quad (\lambda \text{ — действительное число}) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$\varphi(0, \lambda)=1, \quad \varphi'_x(0, \lambda)=0. \tag{2}$$

Рассмотрим теперь решение уравнения в частных производных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\rho(x)\,u=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\rho(y)\,u \tag{3}$$

с начальными условиями

$$u(x, 0)=f(x), \quad \partial u/\partial y\,|_{y=0}=0. \tag{4}$$

Пользуясь методом Римана (см., например, ([2])), можно это решение записать в виде

$$T_x^y f(x)=\frac{1}{2}\,[f(x+y)+f(x-y)]+\int_{x-y}^{x+y} w(x, y, t)\,f(t)\,dt. \tag{5}$$

Полагая в формуле (5) $f(x)=\varphi(x, \lambda)$, получим

$$\varphi(x, \lambda)\,\varphi(y, \lambda)=\frac{1}{2}\,[\varphi(x+y, \lambda)+\varphi(x-y, \lambda)]+\int_{x-y}^{x+y} w(x, y, t)\,\varphi(t, \lambda)\,dt.$$

Это равенство показывает, что функции $\varphi(x, \lambda)$ удовлетворяют второму условию базиса. Что касается первого условия, то оно не выполнено в пространстве всех непрерывных функций. Однако если ограничиться линейным подпространством функций, являющимся замыканием (равномерно в каждом конечном интервале) конечных сумм вида $\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi(x, \lambda_k)$, то в этом подпространстве выполняется также и первое условие базиса. Описанное линейное подпространство непрерывных функций мы в дальнейшем будем сокращенно обозначать буквой L.

Наряду с уравнением (3), рассмотрим также решение уравнения в частных производных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho(x)\, u = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

с начальными условиями (4) и решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \rho(y)\, u \tag{3'}$$

с теми же начальными условиями (4).

Решение будем записывать в виде

$$S_x^y f(x) = \frac{1}{2}[f(x+y) + f(x-y)] + \int_{x-y}^{x+y} w_1(x, y, t) f(t)\, dt, \tag{6}$$

соответственно в виде

$$R_x^y f(x) = \frac{1}{2}[f(x+y) + f(x-y)] + \int_{x-y}^{x+y} w_2(x, y, t) f(t)\, dt. \tag{7}$$

Полагая в (6) $f(x) = \varphi(x, \lambda)$ и затем $x=0$, мы получим

$$\cos\sqrt{\lambda} y = \frac{1}{2}[\varphi(y, \lambda) + \varphi(-y, \lambda)] + \int_{-y}^{y} w_1(0, y, t)\, \varphi(t, \lambda)\, dt.$$

Точно так же из формулы (7) при $f(x) = \cos\sqrt{\lambda} x$ и затем $x=0$ следует формула

$$\varphi(y, \lambda) = \cos\sqrt{\lambda} y + \int_{-y}^{y} w_2(0, y, t) \cos\sqrt{\lambda} t\, dt.$$

2. Эти формулы позволяют, пользуясь преобразованиями, аналогичными ранее использованным в дискретном случае, доказать следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть $f(x) \subset L$ есть положительно определенная функция в том смысле, что для любых действительных чисел $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ и любых точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$ выполняется неравенство*

$$\sum_{\mu, \nu=1}^{n} T_{x_\mu}^{x_\nu} f(x)\, \xi_\mu \xi_\nu \geqslant 0.$$

Тогда функция

$$g(z) = \frac{1}{2}[f(z) + f(-z)] + \int_{-z}^{z} w_1(0, z, t) f(t)\, dt$$

положительно определена в том смысле, что для любых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$ выполняется неравенство

$$\sum_{\mu, \nu=1}^{n} \frac{1}{2} [g(z_\mu + z_\nu) + g(|z_\mu - z_\nu|)] \xi_\mu \xi_\nu \geqslant 0. \qquad (8)$$

М. Г. Крейн показал [3], что непрерывная функция $g(z)$, положительно определенная в смысле неравенства (8), представима в виде

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos \sqrt{\lambda} z d\sigma(\lambda), \qquad (9)$$

где $\sigma(\lambda)$ — ограниченная, монотонно возрастающая функция. Этот результат следует у М. Г. Крейна из весьма общей теории. Однако можно показать, пользуясь предельным переходом, что представление (9) может быть получено из представления (3) в (1).

Из представления (9) и леммы 1 следует теорема, которая ранее в частном случае была доказана А. Я. Повзнером [4] и затем в общей формулировке М. Г. Крейном [3]:

Пусть $f(x)$ — положительно определенная функция в смысле определения леммы 1. *Тогда $f(x)$ представима в виде*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, \lambda) d\sigma(\lambda),$$

где $\sigma(\lambda)$ — ограниченная, монотонно возрастающая функция.

3. Рассмотрим теперь обобщенные почти периодические функции, связанные с оператором Штурма—Лиувилля. При этом нам придется на функцию $\rho(x)$ наложить следующие ограничения: 1) $\rho(x)$ — непрерывная, четная функция для всех действительных x; 2) $\rho(x) \geqslant 0$ для всех действительных x; 3) для больших x (>0) $\rho(x) = O(1/\lambda^{3+\varepsilon})$ ($\varepsilon > 0$).

В дальнейшем нам будет удобно несколько изменить обозначения Обозначим через $u(\lambda, x)$ решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \rho(x) u = -\lambda^2 u \qquad (10)$$

с начальными условиями

$$u(\lambda, 0) = 1, \quad u'_x(\lambda, 0) = 0. \qquad (11)$$

Это решение можно также записать в виде

$$u(\lambda, x) = \cos \lambda x + \frac{1}{\lambda} \int_0^x \sin \lambda (x - z) u(\lambda, z) \rho(z) dz =$$

$$= \cos \lambda z + \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty \sin \lambda (x - z) u(\lambda, z) \rho(z) dz - \frac{1}{\lambda} \int_x^\infty \sin\lambda(x-z) u(\lambda, z) \rho(z) dz =$$

$$= m_1(\lambda) \cos \lambda x + m_2(\lambda) \sin \lambda x - \frac{1}{\lambda} \int_x^\infty \sin \lambda (x - z) u(\lambda, z) \rho(z) dz,$$

где

$$m_1(\lambda) = 1 - \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty \sin \lambda z\, u(\lambda, z) \rho(z) dz,$$

$$m_2(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty \cos \lambda z u(\lambda, z) \rho(z) dz.$$

Положим

$$v(\lambda, x) = \frac{u(\lambda, x)}{\sqrt{m_1^2(\lambda) + m_2^2(\lambda)}}.$$

Мы укажем достаточные условия для того, чтобы непрерывная функция $f(x)$ являлась пределом (по равномерной сходимости на всей действительной оси) конечных сумм вида

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k v(\lambda_k, x).$$

Пусть $w_1(x, y, t)$ есть функция Римана для дифференциального уравнения (3) и начальных условий (4). Пусть $f(x)$ — четная функция и $\tilde{w}_1(x, y, t) = w_1(x, y, t) + w_1(x, y, -t)$. Тогда

$$S_x^y f(x) = \frac{1}{2}[f(x+y) + f(x-y)] + \int_0^\infty \tilde{w}_1(x, y, t) f(t)\, dt,$$

причем последний интеграл фактически берется в конечных пределах.

Лемма 2. *При каждом фиксированном* x

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T dt \int_T^\infty |\tilde{w}_1(x, y, t)|\, dy = 0, \quad \lim_{T\to\infty} \int_0^T dy \int_T^\infty |\tilde{w}_1(x, y, t)|\, dt = 0.$$

Лемма 3. *Для каждого* $\lambda \geqslant 0$ *справедливо тождество*

$$\frac{1}{2}[\cos\lambda(x+t) + \cos\lambda(x-t)] + \int_0^\infty \tilde{w}_1(x, y, t)\cos\lambda y\, dy = v(\lambda, x)\, v(\lambda, t).$$

Обе эти леммы будут доказаны в подробной работе.

Определение. Непрерывная четная функция $f(x)$ называется почти периодической (в обобщенном смысле), если функция $S^y_x f(x)$ почти периодическа в смысле H. Bohr'а по переменной y, равномерно по переменной x $(-\infty \leqslant x \leqslant \infty)$.

Теорема. *Если* $f(x)$ *почти периодическая функция в смысле предыдущего определения, то для каждого* $\varepsilon > 0$ *существует конечная сумма*

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \rho_k^{(n)} a_k v(\lambda_k, x),$$

где $0 \leqslant \rho_k^{(n)} \leqslant 1$; $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_k^{(n)} = 1$ *(k фиксировано)*; $a_k = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(x) v(\lambda_k, x)\, dx$,

удовлетворяющая неравенству

$$\sup_{-\infty \leqslant x \leqslant \infty} |f(x) - s_n(x)| < \varepsilon.$$

Поступило
24 VI 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Левитан, ДАН, **58**, № 6 (1947). [2] Э. Гурса, Курс математического анализа, III, ч. 1, 1933. [3] М. Крейн, ДАН, **53**, № 1 (1946). [4] А. Повзнер, ДАН, **43**, № 9 (1944).