Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 8

МАТЕМАТИКА

П. П. КОРОВКИН

МНОЖЕСТВА СХОДИМОСТИ РЯДОВ ПОЛИНОМОВ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 16 VII 1947)

Пусть

$$p_n(z)=z^n+a_1^{(n)}z^{n-1}+\ldots+a_n^{(n)}.$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(z). \tag{1}$$

В случае, когда $p_n(z)=(z-a)^n$, ряд (1) сходится в круге $|z-a|<R$ и расходится вне этого круга, если

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}=\frac{1}{R}. \tag{2}$$

Мы показали, что мера множества сходимости ряда (1) при условии (2) не превосходит πR^2 [1].

Как следствие из этой теоремы мы получаем, что если ряд (1) при условии (2) сходится в круге радиуса R, то он почти всюду (в смысле лебеговой меры) расходится вне этого круга. Тогда же акад. В. И. Смирнов поставил задачу изучения возможных множеств сходимости вне круга, если условия указанного следствия выполнены. Кроме того, было указано на возможные обобщения, если известна сходимость на множестве, отличном от круга. В настоящей заметке эта задача решается исчерпывающе. Мы сохраняем обозначения предыдущей заметки [2].

Лемма 1. *Если последовательность полиномов $c_np_n(z)$ равномерно сходится на ограниченном замкнутом множестве F, то*

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|}\leqslant\frac{1}{\tau(F)}.$$

Доказательство.

$$|c_nm_n(F)|=\max_F|c_nT_n(z;F)|\leqslant\max_F|c_np_n(z)|=O(1),$$

$$|c_n|\leqslant\frac{O(1)}{m_n(F)},\quad \overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|}\leqslant\frac{1}{\lim\sqrt[n]{m_n(F)}}=\frac{1}{\tau(F)}.$$

Лемма 2. *Если последовательность полиномов $c_np_n(z)$ сходится к нулю на множестве E, то*

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|}\leqslant\frac{1}{\tau_*(E)}.$$

Доказательство. Пусть $F \subset E$ — ограниченное замкнутое множество, $\tau(F) > \tau_*(E) - \varepsilon/2$. На множестве F последовательность полиномов сходится к нулю. В силу теоремы (2) из ([2]), найдется множество F', $\tau(F') > \tau(F) - \varepsilon/2$, сходимость на котором будет равномерной.

Из леммы 1 следует:

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} \leqslant \frac{1}{\tau(F')} < \frac{1}{\tau_*(E) - \varepsilon}.$$

Произвольность ε доказывает лемму.

Следствие. *Если последовательность полиномов $c_n p_n(z)$ сходится на множестве E, то*

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} \leqslant \frac{1}{\tau_*(E)}.$$

Доказательство. Последовательность полиномов $\frac{1}{n} c_n p_n(z)$ сходится на множестве E к нулю. В силу леммы 2 получаем:

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{1}{n} |c_n|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} \leqslant \frac{1}{\tau_*(E)}.$$

Теорема 1. *Если последовательность полиномов $c_n p_n(z)$ сходится на E, то можно указать множество $F_\sigma \supset E$ такое, что*

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} \leqslant \frac{1}{\tau_*(F_\sigma)}.$$

Доказательство. Пусть M_n — множество точек лемнискаты $|c_n p_n(z)| \leqslant n$, $F_n = M_n M_{n+1} \ldots$, $F_\sigma = F_1 + F_2 + \ldots$

Если $z \in E$, то $c_n p_n(z) = O(1)$ и, следовательно, с некоторого номера z будет принадлежать M_n и, тем самым, $z \in F_\sigma$, т. е. $E \subset F_\sigma$.

Пусть E_1 — множество сходимости последовательности полиномов $\frac{1}{n^2} c_n p_n(z)$. Легко проверяется, что $F_\sigma \subset E_1$.

В силу последнего следствия получаем:

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2} |c_n|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{c_n} \leqslant \frac{1}{\tau_*(E_1)} \leqslant \frac{1}{\tau_*(F_\sigma)}.$$

Теорема 2. *Каково бы ни было множество F_σ, можно указать последовательность полиномов $c_n p_n(z)$, сходящуюся на F_σ и такую, что*

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{\tau_*(F_\sigma)}.$$

Доказательство. Пусть $F_\sigma = F_1 + F_2 + \ldots$ Не нарушая общности, считаем, что множества F_n ограничены и монотонно возрастают. Пусть $\tau_*(F_\sigma) = R$.

Если $T_n(z; F_k)$ — полиномы Чебышева множества F_k, то

$$\lim \sqrt[n]{m_n(F_k)} = \tau(F_k) \leqslant R.$$

Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ — последовательность положительных чисел, стремящихся к нулю. Выберем номера n_k так, чтобы $n_k > n_{k-1}$ и

$$m_{n_k}(F_k) < (R + \varepsilon_k)^{n_k}.$$

Последовательность полиномов

$$T_{n_k}(z; F_k) : k(R+\varepsilon_k)^{n_k}$$

сходится к нулю на множестве F_σ и

$$\lim \sqrt[n_k]{\frac{1}{k}\frac{1}{(R+\varepsilon_k)^{n_k}}} = \frac{1}{R} = \frac{1}{\tau_*(F_\sigma)}.$$

Этим теорема доказана.

Теоремы 1 и 2 решают вопрос о множестве сходимости ряда (1) при условии (2). Именно, множество сходимости ряда (1) принадлежит множеству F_σ, $\tau_*(F_\sigma) \leqslant R$, и этот результат не может быть уточнен, если о полиномах $p_n(z)$ нет дополнительных сведений.

Теорема 3. *Если последовательность полиномов* $c_n p_n(z)$ *сходится на множестве* E, $\tau(E)=R$, *и выполнено* (2), *то множество сходимости последовательности вне* E *принадлежит* σ-*множеству*.

Доказательство. Пусть F_σ — множество, которое строится так же, как и в теореме 1. В силу этой теоремы $\tau_*(F_\sigma) \leqslant R$. С другой стороны, $F_\sigma \supset E$. В силу этого $\tau_*(F_\sigma) \geqslant \tau(E) = R$. Таким образом, $\tau(F_\sigma)=R$.

В силу теоремы 4 из ([2]) множество точек F_σ, лежащих вне E, есть σ-множество. Так как F_σ содержит все точки сходимости последовательности полиномов, то теорема доказана.

Теорема 4. *Каково бы ни было множество* E, $\tau(E)=R$, *и* σ-*множество, можно указать последовательность полиномов, сходящуюся во множестве* E *и указанном* σ-*множестве, для которой выполнено условие* (2).

Доказательство. Пусть $\sigma = F_1^{(1)} + F_2^{(1)} + \ldots$ Полагаем $F_k = \overline{E} + F_k^{(1)}$ и $F_\sigma = F_1 + F_2 + \ldots$ Так как $\tau(F_n^{(1)}) = 0$, то, в силу замечания из ([2]), $\tau(F_1 + \ldots + F_k) = \tau(\overline{E}) = R$, и по теореме 3 из ([2]) $\tau_*(F_\sigma) = R$.

В силу теоремы 2 можно указать последовательность полиномов, сходящуюся на F_σ, для которой (2) выполнено. Мы имеем: $F_\sigma = \overline{E} + \sigma$, и теорема доказана.

Все теоремы, очевидно, справедливы и для ряда (1), отрезок которого есть полином степени n (не выше) со старшим коэффициентом c_n.

Следствие 1. *Если ряд* (1) *при условии* (2) *сходится в круге радиуса* R, *то множество сходимости ряда вне круга принадлежит* σ-*множеству, и этот результат не может быть улучшен.*

Это следствие является усилением теоремы, ранее доказанной нами другим путем.

Емкость отрезка длиной $4R$ равна R, а потому

Следствие 2. *Если ряд* (1) *при условии* (2) *сходится на отрезке длиной* $4R$, *то множество сходимости ряда вне отрезка принадлежит* σ-*множеству.*

Поступило
16 VII 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. П. Коровкин, Уч. Зап. Ленинградск. гос. ун-та (1938). [2] П. П. Коровкин, ДАН, 58, № 7 (1947).