Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVII, № 2

МАТЕМАТИКА

Д. МИЛЬМАН

ХАРАКТЕРИСТИКА ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ТОЧЕК РЕГУЛЯРНО-ВЫПУКЛОГО МНОЖЕСТВА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 11 I 1947)

Множество K пространства R^*, сопряженного к комплексному пространству Банаха R, мы будем называть регулярно-выпуклым [1], если для всякого $f_0 \overline{\in} K$ можно указать $x \in R$ так, чтобы

$$\operatorname{Re} f_0(x) < \operatorname*{Inf}_{f \in K} \operatorname{Re} f(x).$$

Как известно [2], ограниченное регулярно-выпуклое множество K является бикомпактом в топологии Тихонова *, если R—вещественное пространство Банаха; то же остается верным, когда R—комплексное пространство Банаха.

Если T—ограниченное множество в R^*, то через K_T мы будем обозначать регулярно-выпуклую оболочку T: пересечение всех регулярно-выпуклых множеств, содержащих T.

Точку f_0, принадлежащую регулярно-выпуклому множеству K, мы будем называть экстремальной в K, если нельзя найти $\varphi, \psi \in K$, $\varphi \neq \psi$, так, чтобы $f_0 = \frac{\varphi+\psi}{2}$.

В совместной статье с М. Г. Крейном автор доказал [3], что регулярно-выпуклая оболочка множества E всех экстремальных точек K совпадает с K (когда K ограничено и регулярно-выпукло, а R—вещественное пространство); эта же теорема остается верной, когда R — комплексное пространство Банаха.

Из последней теоремы следует [3], что точки K суть средние значения, в смысле А. Маркова [4], на $\breve{E}$ **.

В настоящей статье дается дальнейшая характеристика множества экстремальных точек K.

I. Признаки экстремальности точек регулярно-выпуклого множества. Имеет место:

Теорема 1. *Если T — ограниченное множество R^* и $\breve{T}$ — его слабое замыкание (замыкание в смысле Тихонова), то множество E всех экстремальных точек K_T принадлежит $\breve{T}$.*

Доказательство. Теорема доказывается трансфинитной индукцией. Пусть $f_0 \in E$. Пусть t — трансфинитный номер и при $t < \vartheta$

* Окрестности в топологии Тихонова даются системой неравенства:

$$f(x_j) - f_0(x_j) < \varepsilon, \quad x_j \in R, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad f \in K.$$

** $\breve{E}$ обозначает замыкание E в топологии Тихонова.

построены множества S_t, замкнутые в топологии Тихонова, последовательно вложенные друг в друга так, чтобы, кроме того:

$$f_0 = \int\limits_{S_t} f\, d\sigma_t(I),$$

где $\sigma_t(I)$ — вполне аддитивная, неотрицательная функция множеств и $\sigma_t(S_t) = 1$; интеграл понимается, как среднее значение в смысле А. Маркова [4]. Пусть, далее, известно, что $S_1 = \tilde{T}$. Чтобы построить S_ϑ, рассмотрим два случая:

1. ϑ — предельное число. Тогда полагаем

$$S_\vartheta = \underset{t < \vartheta}{D} S_t,$$

где D означает пересечение.

2. Если ϑ не предельное число, то

$$f_0 = \int\limits_{S_{\vartheta-1}} f\, d\sigma_{\vartheta-1}(I).$$

Укажем множество $A \subset S_{\vartheta-1}$ так, чтобы A было замкнутой частью бикомпакта $S_{\vartheta-1}$, отличной от него, и $B = S_{\vartheta-1} - A$ имело замыкание $\tilde{B}$, не совпадающее с $S_{\vartheta-1}$. (Если $f_1 \neq f_2$, f_1, $f_2 \in S_{\vartheta-1}$, то существует окрестность $U(f_1)$, не содержащая f_2, и, окрестность $V(f_1)$, замыкание которой $\tilde{V}(f_1) \subset U(f_1)$, ибо топологическое пространство $S_{\vartheta-1}$, будучи хаусдорфовым и бикомпактным [2], должно быть регулярным; положив $V(f_1) = B$, имеем $f_2 \in S_{\vartheta-1} - \tilde{B}$ и $A = S_{\vartheta-1} - B$ замкнуто; наконец, $f_1 \overline{\in} A$.)

Из равенства

$$f_0 = \int\limits_A f\, d\sigma_{\vartheta-1}(I) + \int\limits_{\tilde{B}} f\, d\sigma_{\vartheta-1}(I)$$

следует:

$$f_0 = \sigma_{\vartheta-1}(A) f' + \sigma_{\vartheta-1}(B) f'' \text{ при } f', f'' \in K_T,$$

$$\sigma_{\vartheta-1}(A) + \sigma_{\vartheta-1}(B) = 1,\ \sigma_{\vartheta-1}(A) \geqslant 0,\ \sigma_{\vartheta-1}(B) \geqslant 0 \text{ *}$$

Ввиду экстремальности $f_0 \in K_T$ должно выполняться либо $\sigma_{\vartheta-1}(A) = 0$, либо $\sigma_{\vartheta-1}(B) = 0$. Обозначим через S_ϑ' то из двух множеств A и B, для которого $\sigma_{\vartheta-1}(S_\vartheta') = 1$. Обозначим, далее, через S_ϑ замыкание S_ϑ'. Очевидно, что $S_{\vartheta-1} \supset S_\vartheta$, S_ϑ замкнуто в топологии Тихонова и выполняется

$$f_0 = \int\limits_{S_\vartheta} f\, d\sigma_\vartheta(I),$$

где $\sigma_\vartheta(I) = \sigma_{\vartheta-1}(I)$, $I \subseteq S_\vartheta$, $\sigma_\vartheta(S_\vartheta) = 1$.

Если построение S_ϑ продолжать неограничено, то наступит трансфинитный номер ϑ_0, при котором $S_\vartheta = S_{\vartheta_0}$, коль скоро $\vartheta > \vartheta_0$, ибо $\tilde{T}$ имеет определенную мощность.

Если бы S_{ϑ_0} содержало более одной точки, то S_{ϑ_0+1} было бы правильной частью бикомпакта S_{ϑ_0}; итак, S_{ϑ_0} содержит лишь одну

---

* Среднее значение в $S_{\vartheta-1}$ индуцирует средние значения в A и B через меру $\sigma_{\vartheta-1}(I)$ [4].

точку; но $f_0 \in K_{S_{\vartheta_0}}$, значит S_{ϑ_0} содержит лишь точку f_0. Наконец, $S_{\vartheta_0} \subset \tilde{T}$ и, следовательно, $f_0 \in \tilde{T}$, ч. и т. д.

Теорема 2. *Для того чтобы точка f_0 ограниченного и регулярно-выпуклого множества K была экстремальной в K, необходимо и достаточно, чтобы регулярно-выпуклая оболочка всякого замкнутого (в топологии Тихонова) подмножества K, не содержащего f_0, также не содержала f_0.*

Простое доказательство этой теоремы мы здесь не приводим.

II. Внутренняя характеристика замыкания множества экстремальных точек.

Определение. T-границей множества $\mathfrak{M}$ сопряженного пространства Банаха мы назовем совокупность Γ всех точек $f \in \mathfrak{M}$, обладающих свойством: а) для каждой окрестности $U(t)$ в $\mathfrak{M}$ можно указать $x \in R$ так, чтобы $\max\limits_{f \in \mathfrak{M}} \operatorname{Re} f(x)$ не достигался в $\mathfrak{M} - U(f)$.

Имеет место:

Теорема 3. 1) *T-граница Γ ограниченного и замкнутого (в топологии Тихонова) множества $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \subset R^*$, совпадает с замыканием множества экстремальных точек регулярно-выпуклой оболочки $K_{\mathfrak{M}}$ множества $\mathfrak{M}$.*

2) Γ *является наименьшим из замкнутых подмножеств $S \subseteq \mathfrak{M}$, через которые все точки $\mathfrak{M}$ могут быть выражены как средние значения в смысле А. Маркова* (4).

Доказательство. 1) Необходимость. Пусть E — множество экстремальных точек $K_{\mathfrak{M}}$ и $\tilde{E}$ — его замыкание (в топологии Тихонова). Пусть, далее, $f_0 \in \tilde{E}$.

В окрестности $U(f_0)$ имеется точка $\varphi_0 \in U(f_0) E$. На основании теоремы 2 существует $x_u \in R$, так что:

$$\operatorname{Re} f(x_u) < \operatorname{Re} \varphi_0(x_u) \text{ для } f \in \mathfrak{M} - U(f_0).$$

Так как $E \subset \mathfrak{M}$ (ибо $\mathfrak{M}$ замкнуто), то, следовательно, $\varphi_0 \in \mathfrak{M}$ и, значит, $\max\limits_{f \in \mathfrak{M}} \operatorname{Re} f(x_u)$ не достигается на $\mathfrak{M} - U(f_0)$. Значит, $f_0 \in \Gamma$.

Достаточность. Пусть $f_0 \in \Gamma$. Для любой окрестности $U(f_0)$ существует, по условию, x_u, так что:

$$\operatorname{Re} f(x_u) < \max_{f \in \mathfrak{M}} \operatorname{Re} f(x_u) \quad \text{при всех} \quad f \in \mathfrak{M} - U(f_0).$$

Пусть $c^0 = \max\limits_{f \in \mathfrak{M}} \operatorname{Re} f(x_u)$. Множество точек $\varphi \in K_{\mathfrak{M}}$, для которых

$$\operatorname{Re} \varphi(x_u) = c^0,$$

обозначим Γ^0. Γ^0 — регулярно-выпукло, не пусто и имеет хотя бы одну экстремальную точку $f^0 \in \Gamma^0$. Нетрудно видеть, что $f_0 \in E \subseteq \mathfrak{M}$.

Так как

$$\operatorname{Re} f(x_u) < \operatorname{Re} f^0(x_u) \text{ при всех } f \in \mathfrak{M} - U(f_0),$$

то, значит, $f^0 \in U(f^0)$ (ибо $f_0 \overline{\in} \mathfrak{M} - U(f_0)$ и $f_0 \in \mathfrak{M}$).

Таким образом, $f^0 \in U(f_0)$ и, значит, $f_0 \in \tilde{E}$, ч. и т. д.

2. По теореме 1 имеем $E \subset S$. По теореме 3(1) имеем $\tilde{E} = \Gamma$. Следовательно, $\Gamma = \tilde{E} \subseteq S$. Далее, $K_E = K_{\mathfrak{M}}$; значит, также $K_\Gamma = K_{\mathfrak{M}}$.

Примечание 1. Нетрудно видеть, что определение а), данное для T-границы, в случае, если множество $\mathfrak{M}$ лежит в гиперплоскости $f(x_0) = 1$, эквивалентно следующему определению: б) точка f_0 принадлежит T-границе $\mathfrak{M}$ в том и только в том случае, если для каждой окрестности $U(f_0)$ в $\mathfrak{M}$ можно указать $x_u \in R$, на котором максимум модуля x_u в $\mathfrak{M}$ не достигается в $\mathfrak{M} - U(f_0)$.

Примечание 2. Определение T-границы и теорема 3 (2) распространяются на любые функционально-определенные * бикомпакты.

III. О множестве экстремальных максимальных идеалов. Как известно (5), множество $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов нормированного кольца R является ограниченным и замкнутым (в топологии Тихонова) подмножеством сопряженного пространства R^*.

И. М. Гельфанд и Г. И. Шилов установили понятие „границы" множества $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов. Из ранее сделанного примечания (об эквивалентности определения а) и б)) следует, что понятие T-границы совпадает с понятием границы в смысле Гельфанда — Шилова, если $\mathfrak{M}$ есть множество максимальных идеалов.

На основании теоремы 1 экстремальные точки $K_{\mathfrak{M}}$ принадлежат $\mathfrak{M}$; мы их назовем „экстремальными максимальными идеалами".

Имеет место:

Теорема 4. *Множество $E_{\mathfrak{M}}$ экстремальных максимальных идеалов является плотной частью границы* Γ *(в топологии Тихонова).*

Эта теорема прямо вытекает из теоремы 3.

Так как регулярно-выпуклая оболочка Γ содержит $\mathfrak{M}$, то получаем следующее интегральное представление для максимальных идеалов:

$$x(M_0) = \int\limits_{\Gamma} x(M)\, d\sigma(I; M_0), \quad x \in R,$$

где $\sigma(I; M_0)$ вполне аддитивная и неотрицательная функция множеств $I \subseteq \Gamma$, для которой $\sigma(\Gamma; M_0) = 1$; интеграл понимается в смысле А. Маркова — как „среднее значение".

В случае, когда кольцо R имеет конечное число образующих, $\mathfrak{M}$ можно рассматривать как множество в конечномерном комплексном пространстве и Γ — как часть обычной границы $\mathfrak{M}$ **. Элементы $x \in R$ являются аналитическими функциями во внутренних точках $M \in \mathfrak{M}$ (если множество $\mathfrak{M}$ содержит внутренние точки) — как пределы полиномов от образующих.

Таким образом, „спектральные" функции $x(M)$, $M \in \mathfrak{M}$, которые характеризуют спектр элементов $x \in R$, являясь аналитическими функциями во внутренних точках $M \in \mathfrak{M}$, представляются в этих точках через границу Γ (по указанной формуле).

Если для множества $\mathfrak{M}$ разрешима задача Дирихле и решение задачи является равномерным пределом полиномов в $\mathfrak{M}$, то указанное интегральное представление является единственным и $\sigma(I; M_0)$ оказывается обобщенной гармонической мерой на Γ.

Поступило
11 I 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1 M. Krein and V. Šmulian, Ann. Math., **41**, No. 3 (1940). 2 L. Alaoglu, Bull. Am. Math. Soc., No. 3 (1938). 3 M. Krein and D. Milman, Studia Math., **9** (1940). 4 А. Марков, Матем. сб., **4** (46): 1 (1938). 5 И. Гельфанд, Матем. сб., **9** (51): 1 (1941).

* Если E — линейная совокупность ограниченных функций на абстрактном множестве $\mathfrak{M}$, то введением окрестностей по Тихонову множество $\mathfrak{M}$ превращается в топологическое пространство, которое мы называем «функционально-определенным».

** Если кольцо R имеет одну образующую, то Γ совпадает с обычной границей $\mathfrak{M}$.