Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVII, № 2

МАТЕМАТИ

Академик С. Н. БЕРНШТЕЙН

О СВОЙСТВАХ ОДНОРОДНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КЛАССОВ

Определение. Назовем основным однородным функциональным телом $\Omega_q(R)$ порядка q радиуса R совокупность всех функций $f(x)$ действительной переменной $(-\infty < x < \infty)$, удовлетворяющих условию

$$A_p f(x) \leqslant R/p^q \tag{1}$$

при любом $p > 0$.

Совокупность функций, принадлежащих хоть одному однородному телу порядка q $\Omega_q(C)$, называется основным однородным классом Ω_q порядка q.

Лемма 1. *Условие* $f(x) \in \Omega_q(R)$ *эквивалентно* $\lambda^q f(\pm x/\lambda) \in \Omega_q(R)$ *при любом* $\lambda > 0$.

Определение. Назовем специальным однородным телом непрерывности $S_q(p_1, \ldots, p_k;\ \alpha_1, \ldots, \alpha_k;\ M)$ порядка q радиуса M типа $(p_1, \ldots, p_k;\ \alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ совокупность всех функций $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ конечного роста (т. е. таких, что для достаточно больших n $\lim\limits_{x=\pm\infty} f(x)/x^n = 0$), удовлетворяющих при любом h условию *

$$\left| \sum_{i=1}^{k} p_i (f(x+\alpha_i h) - f(x) \right| \leqslant M |h|^q. \tag{2}$$

Совокупность функций, принадлежащих телу $S_q(p_1, \ldots, p_k;$ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k;\ M)$ хотя бы при одном $M < \infty$, образует соответствующий специальный однородный класс непрерывности $S_q(p_1, \ldots, p_k;$ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ порядка q. Лемма 1 имеет место также в случае любых специальных однородных тел. В дальнейшем, для определенности, мы считаем совокупности чисел $\{p_i, \alpha_i\}$ нормированными требованиями: 1) $\sum\limits_{i=1}^{k} p_i = 1$; 2) $\alpha_1 = 1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_k$. Сумму $\sum\limits_{i=1}^{k} |p_i| = P$ назовем весом рассматриваемого специального класса; назовем характеристикой m_0 специального класса (тела) $S_q(p_1, \ldots, p_k;\ \alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ данного типа наименьшее из целых чисел $m > 0$, для которых $\sum\limits_{i=1}^{k} p_i \alpha_i^m \gtrless 0$. Легко проверить, что в случае существования производной $f^{(m_0)}(x)$ порядка m_0 в точке x

* Можно показать, что если существует какой-нибудь промежуток $(x_0, x+\delta)$ данной длины δ, где $\sup|f(x)| < \infty$, то из (2) следует, что $f(x)$ обладает тем же свойством в любом конечном промежутке и существует такое определенное число n (зависящее лишь от типа S_q), что $\lim\limits_{x=\pm\infty} f(x)/x^n \to 0$ (см. следствие 3).

$$\frac{f^{(m)}(x)}{m_0!}\sum_{i=1}^{k} p_i\alpha_i^{m_0}=\lim_{h=0}\sum_{i=1}^{k} p_i\left[\frac{f(x+\alpha_i h)-f(x)}{h^{m_0}}\right];$$

поэтому $\sup\limits_{-\infty<x<\infty}\left|\overset{\pm}{f}{}^{m_0}(x)\right|<c<\infty$ означает, что $f(x)$ принадлежит всем специальным однородным классам порядка m_0.

Теорема 1. *Если $f(x)$ принадлежит хоть одному специальному однородному классу S_q порядка q $(f(x)/x^n\to 0$ при $n\geqslant n_0)$, то она принадлежит также основному однородному классу Ω_q порядка q.*

Доказательство. Пусть $G_1(x)\geqslant 0$ будет некоторой целой функцией первой степени, удовлетворяющей условиям:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_1(t)\,dt=1,\qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_1(t)\,|t|^q\,dt=C_q\qquad \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_1(t)\,|t|^{n_0}\,dt<\infty\right). \tag{3}$$

Предполагая, по условию, что $f(x)$ удовлетворяет (2), положим

$$g\ (x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_1(t)\sum_{i=1}^{k} p_i f\left(x+\frac{\alpha_i t}{n}\right)dt=$$

$$=n\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(z)\sum_{i=1}^{k}\frac{p_i}{\alpha_i}G_1\left(\frac{n(z-x)}{\alpha_i}\right)dz. \tag{4}$$

Принимая во внимание, что $\alpha_i\geqslant 1$, $g_n(x)$ есть целая функция степени не выше n. Таким образом, из (2) и (4), вследствие (3), заключаем, что

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_1(t)\sum_{i=1}^{k} p_i\left[f\left(x+\frac{\alpha_i t}{n}\right)-f(x)\right]dt\right|=|g_n(x)-f(x)|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{M}{n^q}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_1(t)\,|t|^q\,dt=\frac{C_q M}{n^q}. \tag{5}$$

Следствие 1. *Если $f(x)$ принадлежит хоть одному специальному однородному классу S_q порядка q, то $f(x)$ непрерывна и имеет непрерывную производную $f^{(m)}(x)$ любого порядка $m<q$.*

Благодаря (5) это вытекает из теоремы 12 ([2]), стр. 105, глава II). Напомню, что из доказательства упомянутой теоремы, воспроизводящего доказательство аналогичных теорем, данное мною еще в 1912 г. ([1]), следует также, что если $f(x)\in\Omega_q$, где $q>1$, то $f^{(m)}(x)\in\Omega_{q-m}$ $(q>m)$.

Следствие 2. *Целая функция $g_n(x)$, определенная формулой (4), принадлежит тому же специальному классу S_q, что и $f(x)$.*

Действительно, вследствие (2),

$$\left|\sum_{j=1}^{k} p_j(g_n(x+\alpha_j h)-g_n(x)\right|=$$

$$=\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_1(t)\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} p_i p_j\left[f\left(x+\frac{\alpha_i t}{n}+\alpha_j h\right)-f\left(x+\frac{\alpha_i t}{n}\right)\right]dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant M\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_1(t)\sum_{i=1}^{k}|p_i h^q|\,dt=MP\,|h|^q.$$

Лемма 2. *Если целая функция $g(x)$ конечной степени принадлежит некоторому специальному однородному классу $S_q(p_i;\alpha_i)$ порядка q с характеристикой m_0, то ее производная $G^{m_0}(x)$ порядка m_0 ограничена на всей оси и $G(x)\in S_{q'}(p_i;\alpha_i)$ при любом q' $(q\leqslant q'\leqslant m_0)$.*

Из леммы 2 заключаем, что $\overline{\lim\limits_{x=\pm\infty}}\,|g(x)|/x^{m_0}<\infty$ откуда, вследствие (5), вытекает

Следствие 3. *Если $f(x)\in S_q$ с характеристикой m_0, то*

$$\overline{\lim_{x=\pm\infty}}\,|f(x)/x^{m_0}|<\infty.$$

Теорема 2. *Если порядок q однородности специального класса $S_q(p_i;\alpha_i)$ больше его характеристики $(q>m_0)$, то всякая функция этого класса есть многочлен степени ниже m_0. Такой класс $(q>m_0)$ называем вырожденным.*

Действительно, согласно теореме 1, $A_nf(x)<R/n^q$. Поэтому $f(x)$ имеет непрерывную производную $f^{(m_0)}(x)$ порядка $m_0<q$ и, согласно сделанному выше замечанию,

$$f^{(m_0)}(x)\sum_{i=1}^{k}p_i\alpha^{m_0}=m_0!\lim_{h=0}\sum_{i=1}^{k}p_i\frac{f(x+\alpha_ih)-f(x)}{h^{m_0}}=0$$

при всяком x (вследствие (2)).

Теорема 3. *Если $f(x)\in\Omega_q(R)$ и $q<m_0$, где m_0 — характеристика некоторого однородного специального класса $S_q(p_1,\ldots,p_k;$ $\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$* порядка q, *то при всяком произвольно малом n_0 $f_{n_0}(x)=$ $=f(x)-G_{n_0}(x)$ принадлежит этому классу, где $G_{n_0}(x)$ есть произвольная целая функция степени n_0, удовлетворяющая неравенству $|f(x)-G_{n_0}(x)|\leqslant R/n_0^q$. В частности, когда q не целое число, $f_{n_0}(x)$ принадлежит всем (не вырожденным) специальным классам S_q (так как характеристика целое m_0 число).*

Доказательство. Пусть $m_0=q+v$ $(v>0)$ и пусть $P=\sum\limits_{i=1}^{k}|p_i|$ — вес рассматриваемого класса S_q. Обозначая через $G_n(x)$ функции степени n, наименее уклоняющиеся от $f(x)$,

$$|f(x)-G_n(x)|\leqslant R/n^q. \tag{6}$$

При произвольно данном h можем выбрать n по условию $n|h|=1$. В таком случае $\left|\sum\limits_{i=1}^{k}p_i[f(x+\alpha_ih)-G_n(x+\alpha_ih)]\right|\leqslant\dfrac{PR}{n^q}$, поэтому

$$\left|\sum_{i=1}^{k}p_i[f(x+\alpha_ih)-f(x)]-\sum_{i=1}^{k}p_i[G_n(x+\alpha_ih)-G_n(x)]\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{(P+1)R}{n^q}=(P+1)R|h|^q. \tag{7}$$

С другой стороны, полагая $b>1$, $n_0=n/b^{l_0}$ и, вообще, $n_l=n/b^{l_0-l}$, где $l_0\geqslant l>0$ — любые целые числа, представим $G_n(x)$ в виде $G_n(x)=$ $=G_{n_0}(x)+\sum\limits_{l=0}^{l_0-1}H_{n_{l+1}}(x)$ $(n=n_{l_0})$, где $H_{n_{l+1}}(x)=G_{n_{l+1}}-G_{n_l}(x)$, причем $|H_{n_{l+1}}(x)| \leqslant \frac{R}{n_l^q} + \frac{R}{n_{l+1}^q}$. В таком случае, полагая

$N = \frac{1}{m_0!}\left|\sum_{i=2}^{k} p_i \alpha_i^{m_0}\right|$, если $k = m_0$, или $N = \frac{1}{m_0!}\sum_{i=1}^{k} |p_i| \alpha_i^{m_0}$, когда $k > m_0$,

имеем

$$\left|\sum_{i=1}^{k} p_i [H_{n_{l+1}}(x + \alpha_i h) - H_{n_{l+1}}(x)]\right| \leqslant N|h|^{m_0} \sup_{-\infty < x < \infty} |H_{n_{l+1}}^{(m_0)}(x)| \leqslant$$

$$\leqslant NR|h|^{m_0} n_{l+1}^{m_0}\left[\frac{1}{n_l^q} + \frac{1}{n_{l+1}^q}\right] = NR|h|^q (b^q + 1)|h_{n_{l+1}}|^v =$$

$$= NR|h|^q (b^q + 1) b^{(l+1-l_0)}.$$

Поэтому

$$\left|\sum_{l=0}^{l_0-1}\sum_{i=1}^{k} p_i [H_{n_{l+1}}(x + \alpha_i h) - H_{n_{l+1}}(x)]\right| < NR|h|^q (b^q + 1)\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{b^{lv}} =$$

$$= \frac{NR(b^{m_0} + b^v)}{b^v - 1}|h^q|,$$

откуда, полагая $f_{n_0}(x) = f(x) - G_{n_0}(x)$, вследствие (7), находим, что

$$\sum_{i=1}^{k} p_i [f_{n_0}(x + \alpha_i h) - f_{n_0}(x)] < \left[N\frac{b^{m_0} + b^v}{b^v - 1} + P + 1\right] R|h|^q\ {}^*. \tag{8}$$

Следствие 4. *Если $f(x) \in \Omega_q$ и $A_0 f(x) < \infty$, то $f(x) - G_0(x) = f_0(x) \in S_q$, каков бы ни был специальный класс S_q порядка $q < m_0$, обозначая через $G_0(x)$ функцию нулевой степени, наименее уклоняющуюся от $f(x)$.*

Ограничимся пока предположением, что функция $f(x)$ ограничена. Тогда $G_0(x) = G_0$ будет постоянной, и из теорем 1 и 3 получаем

Следствие 5. *Если функция $f(x)$ ограничена (в частности, если она периодична), то утверждение $f(x) \in \Omega_q$ эквивалентно утверждению $f(x) \in S_q(p_1, \ldots, p_k;\ \alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, какого бы типа ни был специальный однородный класс S_q порядка q с любой характеристикой $m_0 > q$.*

Последнее следствие в частном случае, соответствующем периодическим функциям и типу $p_i = (-1)^i C_k^i$, $\alpha_i = i$ $(i \leqslant k = m_0 > q)$ (т. е. конечным разностям), было установлено Zygmund'ом ([4]). Таким образом, для ограниченных функций все специальные однородные классы S_q порядка $q < m$ эквивалентны.

Поступило
22 V 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Bernstein, Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues, Mémoire couroné par l'Académie de Belgique, 1912. [2] S. Bernstein, Lecons sur les propriétés extremales, Paris, 1926. [3] С. Н. Бернштейн, Экстремальные свойства полиномов, 1937. [4] A. Zygmund, Duke Math. J., 12 (1945).

* Полагая в данном выше доказательстве $n|h| = c$ произвольным, можно несколько снизить оценку (8) наилучшим выбором c и b (в первом и втором слагаемых появляются, соответственно, множители c^v и c^{-q}). Например, в случае $q = 1$, $m_0 = 2$ наивыгоднейшее $b = 1 + \sqrt{2}$ и, в частности, получим $|f(x + 2h) - 2f(x + h) + f(x)| \leqslant 4R(1 + \sqrt{2})h$ (полагая $c = 2/b$).