Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 8

МАТЕМАТИКА

И. М. ГЕЛЬФАНД и М. А. НАЙМАРК

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ И ВЫРОЖДЕННЫЕ СЕРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ КОМПЛЕКСНОЙ УНИМОДУЛЯРНОЙ ГРУППЫ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 8 VII 1947)

В предыдущих заметках ([1, 2]) была дана основная серия неприводимых унитарных представлений комплексной унимодулярной группы $\mathfrak{G}$. Здесь мы даем так называемые дополнительные и вырожденные серии представлений этой группы. Мы будем придерживаться обозначений ([1, 2]).

Для дальнейшего нам придется обобщить подгруппы, рассмотренные в ([1]). Эти подгруппы определяются совершенно аналогично, но их элементами являются не числа, а матрицы.

§ 1. Некоторые подгруппы группы $\mathfrak{G}$

Пусть $n_1, \ldots, n_r$ — натуральные числа такие, что $n_1+\ldots+n_r=n$, где n — порядок группы $\mathfrak{G}$. Обозначим через g_{pq} матрицу, состоящую из n_p строк и n_q столбцов. Матрицу $g\in\mathfrak{G}$ мы можем представить как матрицу $\|g_{pq}\|_{p,q=1,\ldots,r}$.

1. Подгруппа K. Обозначим через K совокупность всех $k=\|k_{pq}\|\in\mathfrak{G}$, для которых матрица $k_{pq}=0$ при $p>q$. Отсюда следует, что

$$\mathrm{Det}(k_{11})\,\mathrm{Det}(k_{22})\ldots\mathrm{Det}(k_{rr})=1.$$

Если левая и правая инвариантные меры в подгруппе K задаются дифференциалами $d\mu_l(k)$ и $d\mu_r(k)$, то, обозначая $\beta(k)=d\mu_l(k)/d\mu_r(k)$, имеем:

$$\beta(k)=|\Lambda_1|^{-2n_2-2n_3-\ldots-2n_r}|\Lambda_2|^{2n_1-2n_3-\ldots-2n_r}\ldots|\Lambda_r|^{2n_1+2n_2+\ldots+2n_{r-1}},\quad (1)$$

где

$$\Lambda_j=\mathrm{Det}(k_{jj}),\quad j=1,\ldots,r.$$

2. Подгруппа Z. Обозначим через Z совокупность матриц $\|z_{pq}\|_{p,q=1,\ldots,r}$, для которых $z_{pq}=0$ при $p<q$ и $z_{pp}=1$, где 1 — единичная матрица порядка n_p. В Z есть двусторонне инвариантная мера, задаваемая равенством $d\mu(z)=\prod\limits_{p>q}dx_{pq}\cdot dy_{pq}$, где dx_{pq}, соответственно dy_{pq}, обозначают произведения дифференциалов действительных, соответственно мнимых, частей элементов матрицы z_{pq}.

3. Подгруппа D. Обозначим через D совокупность матриц $\delta\in\mathfrak{G}$, в которых $\delta_{pq}=0$ при $p\neq q$. Матрицу δ_{pp} обозначим через δ_p и будем писать $\delta=[\delta_1,\ldots,\delta_r]$. Аналогично можно определить подгруппы H и Z.

I. Всякий элемент k можно представить, и притом единственным образом, в виде $k=\delta\zeta$, а также в виде $k=\zeta\delta$.

Аналогичное разложение имеет место для элементов h.

II. Если $g_{n_1+\ldots+n_{p+1}}\neq 0$, $p=1, 2, \ldots, r-1$, то g можно представить, и притом единственным образом, в виде $g=kz$, а также в виде $g=\zeta h$. При этом элементы $k_{pq}^{(\lambda,\mu)}$, $\zeta_{pq}^{(\lambda,\mu)}$, $h_{pq}^{(\lambda,\mu)}$ матриц k, ζ и h выражаются через элементы матриц g по формулам:

$$h_{pq}^{(\lambda,\mu)}=\frac{1}{g_{n_1+\ldots+n_{p+1}+1}}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} n_1+\ldots+n_p+\lambda, & n_1+\ldots+n_{q+1}+1, & n_1+\ldots+n_{q+1}+2, & \ldots, & n \\ n_1+\ldots+n_q+\mu, & n_1+\ldots+n_{q+1}+1, & n_1+\ldots+n_{q+1}+2, & \ldots, & n \end{pmatrix},$$

$$p\geqslant q, \qquad 0\leqslant\lambda\leqslant n_p, \qquad 0\leqslant\mu\leqslant n_q. \tag{2}$$

$$k_{pq}^{(\lambda,\mu)}=\frac{1}{g_{n_1+\ldots+n_{q+1}+1}}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} n_1+\ldots+n_p+\lambda, & n_1+\ldots+n_{p+1}+1, & n_1+\ldots+n_{p+1}+2, & \ldots, & n \\ n_1+\ldots+n_q+\mu, & n_1+\ldots+n_{p+1}+1, & n_1+\ldots+n_{p+1}+2, & \ldots, & n \end{pmatrix},$$

$$p\leqslant q, \qquad 0\leqslant\lambda\leqslant n_p, \qquad 0\leqslant\mu\leqslant n_q. \tag{3}$$

$$z_{pq}=h_{pp}^{-1}\,h_{pq}, \qquad \zeta_{pq}=k_{pq}\,k_{qq}^{-1}. \tag{4}$$

Кроме того,

$$\det k_{pp}=\det h_{pp}=\frac{g_{n_1+\ldots+n_p+1}}{g_{n_1+\ldots+n_{p+1}+1}}. \tag{5}$$

Если $r=n$, $n_1=\ldots=n_r=1$, то эти формулы переходят в соответствующие формулы в ([1]).

Как и в ([1]), мы будем рассматривать правые классы смежности по обобщенным подгруппам Z и K и преобразования $\breve{h}\to\breve{h}\bar{g}$ и $\breve{z}\to\breve{z}\bar{g}$ этих классов. В силу I классы $\breve{h}, \breve{z}$ можно с точностью до многообразия низшей размерности представить при помощи элементов групп H и Z, соответственно. Кроме того, в дальнейшем понадобятся двусторонние классы смежности $\mathfrak{z}$ по подгруппе K.

Группа K, рассмотренная в п° 2, § 4 в ([1]), является подгруппой обобщенной группы K. Поэтому из приведенных там результатов следует, что двусторонний класс по обобщенной группе K также определяется перестановкой чисел $(1, \ldots, n)$, но разные перестановки могут теперь определять один и тот же класс.

§ 2. Соотношения между интегралами по $\mathfrak{G}$ и по подгруппам K, H, Z, Z и D

Как и в ([1]), для этих интегралов имеют место соотношения:

$$\int_K f(k)\,d\mu_l(k)=\int_D\int_Z f(\delta\zeta)\,d\mu(\delta)\,d\mu(\zeta), \tag{6}$$

$$\int_K f(k)\,d\mu_r(k)=\int_D\int_Z f(\zeta\delta)\,d\mu(\delta)\,d\mu(\zeta), \tag{7}$$

$$\int_H f(h)\,d\mu_l(h)=\int_D\int_Z f(\delta z)\,d\mu(\delta)\,d\mu(z), \tag{8}$$

$$\int_H f(h)\,d\mu_r(h)=\int_D\int_Z f(z\delta)\,d\mu(\delta)\,d\mu(z), \tag{9}$$

$$\int\limits_{\mathfrak{G}} f(g)\,d\mu(g) = \int\limits_{K}\int\limits_{Z} f(kz)\,d\mu(z)\,d\mu_l(k) =$$

$$= \int\limits_{H}\int\limits_{Z} f(\zeta h)\,d\mu(\zeta)\,d\mu_r(h). \qquad (10)$$

§ 3. Основные серии унитарных представлений группы $\mathfrak{G}$

В дальнейшем мы рассматриваем все обобщенные подгруппы K, Z, Z, D при одних и тех же фиксированных $n_1, \ldots, n_r$.

Положим

$$\beta(kz) = \beta(k), \qquad \chi(\delta\zeta z) = \chi(\delta) = \chi_2(\Lambda_2)\ldots\chi_r(\Lambda_r),$$

где $\chi_2, \ldots, \chi_r$ — произвольные характеры мультипликативной группы всех комплексных чисел. Следовательно, $\chi_j(\Lambda_j) = |\Lambda_j|^{m_j + i\rho_j}\ \Lambda^{-m_j}$, $j = 2, \ldots, r$, где m_j — целые числа, а ρ_j — действительные числа.

Обозначим через $\mathfrak{H}_z$ совокупность всех функций $f(z)$ с суммируемым квадратом на Z и введем в пространстве $\mathfrak{H}_z$ оператор U_g равенством

$$U_g f(z) = \beta^{-1/2}(zg)\,\chi(zg)\,f(z\bar{g}). \qquad (11)$$

Соответствие $g \to U_g$ есть унитарное представление группы $\mathfrak{G}$.

Таким образом, каждой системе характеров $\chi_2, \ldots, \chi_n$ соответствует унитарное представление группы $\mathfrak{G}$.

Совокупность всех таких представлений мы будем называть **основной серией представлений группы** $\mathfrak{G}$. Фиксируя различным образом числа $n_1, \ldots, n_p$, мы будем получать вообще различные основные серии.

Если $r = n$, $n_1 = \ldots = n_r = 1$, то получается основная серия, рассмотренная в [2]; мы будем ее называть **невырожденной**. В противном случае основная серия называется **вырожденной**. В случае невырожденной серии $f(z) \in \mathfrak{H}_z$ есть функция от $\frac{n(n-1)}{2}$ комплексных параметров; в остальных случаях $f(z)$ зависит от меньшего числа комплексных параметров.

Теорема 1. *Все представления (вырожденной или невырожденной) основной серии неприводимы.*

§ 4. Дополнительные серии унитарных представлений группы $\mathfrak{G}$

Предположим, что $n_1 = n_2 = \ldots = n_{2\tau} = 1$, где $\tau \geqslant 1$. Обозначим через Z' совокупность всех элементов $z' \in Z$ таких, что $z'_{2j,\,2j-1} \neq 0$ при $0 < j \leqslant \tau$ и $z'_{pq} = 0$ в противном случае. Рассмотрим совокупность Σ всех пар $\{z, z'z\}$, где z пробегает Z, а z' пробегает Z'. Введем в Σ операцию $\bar{g}$ полагая $\{z, z'z\}\,\bar{g} = \{z\bar{g}, (z'z)\bar{g}\}$. Группу $\mathfrak{G}$ можно тогда рассматривать как группу преобразований в Σ, а Σ является транзитивным многообразием по отношению к группе $\mathfrak{G}$. При этом, если $zg = k\cdot z\bar{g}$, то $\{z, z'z\}\,\bar{g} = \{z\bar{g},\ z'\bar{k}\cdot z\bar{g}\}$.

Положим

$$\chi(\delta) = \prod_{j=1}^{\tau} |\Lambda_{2j-1}|^{m_j + \sigma_j + i\rho_j}\,\Lambda_{2j-1}^{-m_j}\,|\Lambda_{2j}|^{m_j - \sigma_j + i\rho_j}\,\Lambda_{2j}^{m_j} \prod_{j=2\tau+1}^{\tau} |\Lambda_j|^{m_j + i\rho_j}\,\Lambda_j^{-m_j}, \qquad (12)$$

где $m_1=0,\ m_2,\ \ldots,\ m_\tau,\ m_{2\tau+1},\ \ldots,\ m_r$ — целые числа, $\sigma_j,\ \rho_j$ — действительные числа, причем $0<\sigma_j<1,\quad j=1,\ \ldots,\ \tau$. Числа $m_2,\ \ldots,\ m_r$ и $\sigma_j,\ \rho_j,\ j=1,\ \ldots,\ \tau$, будут параметрами, определяющими данное представление. Положим далее

$$a(z')=\prod_{j=1}^{\tau}\left|z'_{2j,\,2j-1}\right|^{-2+2\sigma_j}$$

и обозначим через $\mathfrak{H}'$ совокупность всех функций $f(z)$ таких, что интеграл

$$(f,f)=\int a(z')f(z)\overline{f(z'z)}\,d\mu(z)\,d\mu(z')$$

сходится абсолютно. При этом $d\mu(z')=\prod_{j=1}^{\tau}d\mu(z_{2j,\,2j-1})$. Из условия $0<\sigma_j<1$ следует, что $(f,f)\geqslant 0$ для любой функции $f\in\mathfrak{H}'$. Поэтому можно ввести в $\mathfrak{H}'$ скалярное произведение, полагая

$$(f_1,f_2)=\int a(z')f_1(z)\overline{f_2(z'z)}\,d\mu(z)\,d\mu(z').$$

Пополнение множества $\mathfrak{H}'$ по норме $\sqrt{(f,f)}$ обозначим через $\mathfrak{H}$; $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство. Положим теперь $\chi(\delta\zeta z)=\chi(\delta)$, $\beta(\delta\zeta z)=\beta(\delta)$; тогда $\chi(g)$ и $\beta(g)$ определены на почти всей группе $\mathfrak{H}$. Далее, положим для $f\in\mathfrak{H}'$

$$U_g f(z)=\beta^{-1/2}(zg)\,\chi(zg)\,f(z\bar{g}). \tag{13}$$

Множество $\mathfrak{H}'$ остается инвариантным при применении оператора U_g и $(U_g f,\ U_g f')=(f,f')$, т. е. U_g — унитарный оператор в $\mathfrak{H}'$. Он поэтому продолжается, и притом единственным образом, до унитарного оператора U_g в $\mathfrak{H}$. Отображение $g\to U_g$ есть унитарное представление группы $\mathfrak{G}$ в пространстве $\mathfrak{H}$. Совокупность всех представлений $g\leftarrow U_g$, соответствующих всевозможным значениям параметров $m_2,\ldots,$ $m_\tau,\ m_{2\tau+1},\ \ldots,\ m_r,\ \rho_j$ и σ_j, $0<\sigma_j<1,\ j=1,\ \ldots,\ \tau$, называется д о п о л н и т е л ь н о й с е р и е й п р е д с т а в л е н и й г р у п п ы $\mathfrak{G}$. Фиксируя различным образом числа $\tau,\ n_1=\ldots=n_{2\tau}=1,\ n_{2\tau+1},\ \ldots,\ n_r$, мы получим, вообще различные, дополнительные серии представлений. Если при этом также $n_{2\tau+1}=\ldots=n_r=1$, следовательно $r=n$, то дополнительная серия называется н е в ы р о ж д е н н о й. В противном случае она называется в ы р о ж д е н н о й.

При $\sigma_j>1$ форма (f,f) недефинитна. При $\sigma_j=1$ может быть $(f,f)=0$ для $f(z)\neq 0$; идентифицируя такие $f(z)$ с нулем, мы получаем некоторое из представлений основной вырожденной серии.

Т е о р е м а 2. *Все представления (вырожденной или невырожденной) дополнительной серии неприводимы.*

Формулы (11) и (13) для операторов U_g представлений основных и дополнительных серий можно выписать подробнее в параметрах, определяющих матрицы z. Для этого достаточно воспользоваться формулами (1), (2), (3), (4). В случае унимодулярной группы второго порядка основная и дополнительная серии были указаны авторами в ([3]), а затем подробно рассмотрены в ([4]).

Поступило
8 VII 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Г е л ь ф а н д и М. А. Н а й м а р к, ДАН, **54**, № 3 (1946). [2] И. М. Г е л ь ф а н д и М. А. Н а й м а р к, ДАН, **56**, № 1 (1947). [3] J. G e l f a n d and M. N e u m a r k, J. of Physics, **10**, № 2 (1947). [4] И. М. Г е л ь ф а н д и М. А. Н а й м а р к, Изв. АН СССР, сер. матем., **11**, № 5 (1947).