Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 8

МАТЕМАТИКА

Н. Я. ВИЛЕНКИН

К ТЕОРИИ ОБЩИХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУПП

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 29 VII 1947)

В нескольких появившихся за последнее время работах рассматривались общие топологические группы, т. е. такие топологические группы, в которых не выполнены аксиомы отделимости ([1],[2]).

Мы доказываем в этой заметке, что общая топологическая абелева группа является фактор-группой топологической хаусдорфовой группы по ее незамкнутой подгруппе.

Лемма. *Пусть G — дискретная абелева группа и H — ее подгруппа. Пусть, далее, T — такая безгранично делимая группа (т. е. $nT = T$), что существует изоморфное отображение φ группы H в T.*

Тогда существует такое изоморфное отображение ψ группы G в $T \dot{+} G_1 = \hat{G}$, где $G_1 \sim G/H$, что $\psi(G) \cap T = \varphi(H)$.

Доказательство. Рассмотрим в группе G цепочку подгрупп $H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_\beta \subset \ldots$ такую, что $G = \bigcup\limits_\beta H_\beta$ и $H_{\beta+1}/H_\beta$ является при всех β конечной или бесконечной циклической группой. Обозначим через θ изоморфное отображение группы G/H на G_1.

Положим при $g \in H$ $\psi_0(g) = \varphi(g)$. Пусть уже построены отображения $\psi_1, \ldots, \psi_\beta$ групп $H_1, \ldots, H_\beta$ в $\hat{G}$ такие, что $T \cap \psi_\alpha(H_\alpha) = \varphi(H)$ и $\psi_{\alpha+1}(g) = \psi_\alpha(g)$, если $g \in H_\alpha$. Выберем в $H_{\beta+1} \setminus H_\beta$ такой элемент $h_{\beta+1}$, что $H_{\beta+1} = \{h_{\beta+1};\ H_\beta\}$.

Если не существует такого целого m, что $mh_{\beta+1} \in H_\beta$, то положим $\psi_{\beta+1}(g + lh_{\beta+1}) = \psi_\beta(g) + l\theta(h_{\beta+1})$, где $g \in H_\beta$ и l — целое число. Легко проверить, что этим определяется изоморфное отображение группы $H_{\beta+1}$ в $\hat{G}$, причем $T \cap \psi_{\beta+1}(H_{\beta+1}) = \varphi(H)$ и $\psi_{\beta+1}(g) = \psi_\beta(g)$, если $g \in H_\beta$. Пусть теперь m является наименьшим целым положительным числом таким, что $mh_{\beta+1} \in H_\beta$. Элемент $\psi_\beta(mh_{\beta+1}) - \theta(mh_{\beta+1}) \in \psi_\beta(H) \subset T$ и, в силу безграничной делимости T, найдется такой элемент $\hat{h}_{\beta+1} \in T$, что $m\hat{h}_{\beta+1} = \psi(mh_{\beta+1}) - \theta(mh_{\beta+1})$. Положим тогда $\psi_{\beta+1}(g + lh_{\beta+1}) = \psi_\beta(g) + l\theta(h_{\beta+1}) + l\hat{h}_{\beta+1}$, где $g \in H_\beta$ и l — целое число. Имеем

$$\psi_{\beta+l}(mh_{\beta+1}) = m\theta(mh_{\beta+1}) + m\hat{h}_{\beta+1} = \psi_\beta(mh_{\beta+1}),$$

$$\psi_{\beta+1}(g_1 + l_1 h_{\beta+1} + g_2 + l_2 h_{\beta+1}) =$$

$$= \psi_{\beta+1}(g_1) + \psi_{\beta+1}(g_2) + l_1\theta(h_{\beta+1}) + l_2\theta(h_{\beta+1}) + l_1\hat{h}_{\beta+1} + l_2\hat{h}_{\beta+1}.$$

Отсюда следует, что $\psi_{\beta+1}$ является изоморфным отображением $H_{\beta+1}$ в $\hat{G}$, удовлетворяющим поставленным требованиям. Если λ — трансфинитное число второго рода, то положим $\psi_\lambda(g) = \psi_\mu(g)$ при $\mu < \lambda$. Таким образом строятся отображения $\psi_1 \ldots \psi_\beta \ldots$ Положим теперь

$\psi(g)=\psi_\mu(g)$, если $g\in H_\mu$. Легко проверить, что отображение ψ является искомым.

Теорема. *Пусть G — общая топологическая абелева группа. Тогда существует такая хаусдорфова топологическая абелева группа $\hat{G}$ и ее подгруппа $\hat{H}$ (вообще говоря, незамкнутая), что $G=\hat{G}/\hat{H}$.*

(Относительно определения фактор-группы по незамкнутой подгруппе см. ([1])).

Напомним, что если L является замыканием нуля группы G, то G/L будет хаусдорфовой группой. Обозначим через G^* группу G в дискретной топологии и через L^* — подгруппу группы G^*, соответствующую подгруппе L. Пусть T — такая безгранично делимая группа, что существует изоморфное отображение φ группы L^* в T *. В силу леммы существует такое изоморфное отображение ψ группы G в $T\dot{+}G^*/L^*$, что $\psi(G^*)\cap T=\varphi(L^*)$.

Существует, далее, непрерывное алгебраически изоморфное отображение θ группы $T\dot{+}G^*/L^*$ на группу $T\dot{+}G/L$.

Как известно ([4]), группа T имеет вид

$$T=\sum_\alpha R_\alpha\dot{+}\sum_k\sum_\alpha P_{\alpha k}, \tag{1}$$

где группы R_α изоморфны аддитивной группе рациональных чисел, а $P_{\alpha k}$ суть группы типа p_k^∞.

Рассмотрим теперь группу

$$Q=\sum_\alpha Q_\alpha\dot{+}\sum_k\sum_\alpha Q_{\alpha k}\dot{+}T\dot{+}G/L,$$

где Q_α, $Q_{\alpha k}$ суть бесконечные циклические группы, причем их число равно числу прямых слагаемых в (1). Мы можем представить тогда группу Q в виде

$$Q=\sum_\alpha(R_\alpha\dot{+}Q_\alpha)\dot{+}\sum_k\sum_\alpha(P_{\alpha k}\dot{+}Q_{\alpha k})\dot{+}G/L.$$

Определим теперь следующим образом отображение ω группы Q в группу

$$V=\underset{\alpha}{S}V_\alpha\dot{+}\underset{k}{S}\underset{\alpha}{S}V_{\alpha k}\dot{+}G/L, \tag{2}$$

где V_α, $V_{\alpha k}$ являются группами K ([5]) и число прямых слагаемых в (2) равно числу прямых слагаемых в (1).

Положим $\omega(R_\alpha\dot{+}Q_\alpha)\subset V_\alpha$, $\omega(P_{\alpha k}\dot{+}Q_{\alpha k})\subset V_{\alpha k}$ и $\omega(G/L)=G/L$, причем ω взаимно однозначно и алгебраически изоморфно на всех $R_\alpha\dot{+}Q_\alpha$ и $P_{\alpha k}\dot{+}Q_{\alpha k}$. Очевидно, что $\overline{\omega(R_\alpha)}=\overline{\omega(Q_\alpha)}=V_\alpha$ и $\overline{\omega(P_{\alpha k})}=\overline{\omega(Q_{\alpha k})}=V_{\alpha k}$.

Далее, заметим, что $\omega\left(\sum_\alpha Q_\alpha\dot{+}\sum_k\sum_\alpha Q_{\alpha k}\right)$ всюду плотно в $\underset{\alpha}{S}V_\alpha\dot{+}\underset{k}{S}\underset{\alpha}{S}V_{\alpha k}$ и, тем более, в $\omega\left[\sum_\alpha(R_\alpha\dot{+}Q_\alpha)\dot{+}\sum_k\sum_\alpha(P_{\alpha k}\dot{+}Q_{\alpha k})\right]$ и в $\omega\left[\sum_\alpha Q_\alpha\dot{+}\sum_k\sum_\alpha Q_{\alpha k}\dot{+}\theta\psi(L^*)\right]$.

* Такая группа T всегда существует, см. ([3]).

Из изложенного следует, что $G \sim \hat{G}/\hat{H}$, где $\hat{G} = \omega\left[\sum\limits_{\alpha} Q_{\alpha} \dot{+} \sum\limits_{k} \sum\limits_{\alpha} Q_{\alpha k} + 0\psi(G^{*})\right]$ и $\hat{H} = \omega\left[\sum\limits_{\alpha} Q_{\alpha} \dot{+} \sum\limits_{k} \sum\limits_{\alpha} Q_{\alpha k}\right]$.

Поступило
29 VII 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Eilenberg and S. MacLane, Ann. Math., **43**, 761 (1942). [2] K. Kadaira, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, **23**, 75 (1941). [3] Л. Я. Куликов, Матем. сб., **16** (58): 2, 134 (1945). [4] А. Г. Курош, Теория групп, 1944, стр. 224 и 247. [5] Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы, 1938, стр. 142.