Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 8

МАТЕМАТИКА

Д. Л. БЕРМАН

ОБ ОДНОМ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОМ ПРОЦЕССЕ ЭРМИТА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 14 VII 1947)

1°. Пусть задана треугольная матрица чисел

$$\begin{array}{l} x_1^{(1)} \\ x_1^{(2)}\ x_2^{(2)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_1^{(n)}\ x_2^{(n)}\ x_3^{(n)}\ \ldots\ x_n^{(n)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array} \tag{1}$$

причем

$$a \leqslant x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \ldots < x_n^{(n)} \leqslant b \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{gathered} \omega_n(x) = (x - x_1^{(n)})(x - x_2^{(n)}) \ldots (x - x_n^{(n)}), \\ v_k^{(n)}(x) = 1 - \frac{\omega_n''(x_k^{(n)})}{\omega_n'(x_k^{(n)})}(x - x_k^{(n)}), \\ l_k^{(n)}(x) = \frac{\omega_n(x)}{(x - x_k^{(n)})\,\omega'(x_k^{(n)})}, \\ h_k^{(n)}(x) = v_k^{(n)}(x)\,[l_k^{(n)}(x)]^2, \\ \lambda_k^{(n)}(x) = (x - x_k^{(n)})\,[l_k^{(n)}(x)]^2. \end{gathered} \tag{2}$$

Существует единственный полином $H_n(x)$, степень которого не превосходит $2n-1$, удовлетворяющий условиям:

$$H_n(x_k^{(n)}) = c_k^{(n)}, \quad H_n'(x_k^{(n)}) = d_k^{(n)},$$

где $c_k^{(n)}$ и $d_k^{(n)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — любые наперед заданные числа. Этот полином задается формулой

$$H_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k^{(n)} h_k^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^{n} d_k^{(n)} \lambda_k^{(n)}(x). \tag{3}$$

Согласно L. Fejer'у, матрица (1) называется нормальной, если выполняются неравенства

$$v_k^{(n)}(x) > 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n; \quad n = 1, 2, \ldots)$$

в промежутке $[a, b]$, и сильно нормальной или ρ-нормальной, если в промежутке $[a, b]$

$$v_k^{(n)}(x) > \rho > 0 \qquad (k=1, 2, \ldots, n; \quad n=1, 2, \ldots).$$

2°. Докажем следующую теорему.

Теорема. 1) *Пусть матрица* (1) *нормальная*; 2) $f(x)$ — *непрерывная функция в* $[a, b]$; 3) $\{P_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — *любая последовательность полиномов, сходящаяся равномерно к* $f(x)$ *в* $[a, b]$, *причем степень полинома* $P_n(x)$ *не превосходит* $2n-1$.

Тогда интерполяционные полиномы $H_n(x)$, *построенные согласно условиям*:

$$H_n(x_k^{(n)}) = f(x_k^{(n)}), \qquad H_n'(x_k^{(n)}) = P_n'(x_k^{(n)}),$$

сходятся равномерно к функции $f(x)$ *в промежутке* $[a, b]$.

Доказательство. Из формулы (2) видно, что для нормальной матрицы

$$h_k^{(n)}(x) \geqslant 0 \qquad (a \leqslant x \leqslant b; \quad k=1, 2, \ldots, n; \quad n=1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Из формулы (3) следует, что

$$\sum_{k=1}^{n} h_k^{(n)}(x) \equiv 1. \tag{5}$$

Для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что

$$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon/2$$

при $n \geqslant N$.

Заметим, что по формуле (3)

$$P_n(x) \equiv \sum_{k=1}^{n} P_n(x_k^{(n)}) h_k^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^{n} P_n'(x_k^{(n)}) \lambda_k^{(n)}(x),$$

$$H_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^{(n)}) h_k^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^{n} P_h'(x_k^{(n)}) \lambda_k^{(n)}(x).$$

Поэтому, учитывая (4) и (5), мы получаем, что для $n \geqslant N$

$$|P_n(x) - H_n(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(x_k^{(n)}) - P_n(x_k^{(n)})| \, h_k^{(n)}(x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, для этих n будет

$$|f(x) - H_n(x)| \leqslant |f(x) - P_n(x)| + |P_n(x) - H_n(x)| < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

3°. G. Grünwald (2) доказал такую теорему:

1) Пусть матрица (1) ρ-нормальная; 2) $f(x)$ — произвольная непрерывная функция в $[-1, 1]$; 3) числа $d_k^{(n)}$ удовлетворяют неравенствам

$$|d_k^{(n)}| < n^{\rho - \varepsilon} \qquad (k=1, 2, \ldots, n; \quad n=1, 2, \ldots),$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Тогда интерполяционные полиномы $H_n(x)$, построенные согласно условиям $H_n(x_k^{(n)}) = f(x_k^{(n)})$, $H_n'(x_k^{(n)}) = d_k^{(n)}$, сходятся равномерно в $[-1, 1]$ к функции $f(x)$.

Интересно сравнить нашу теорему с теоремой G. Grünwald'a. Во-первых, в нашей теореме требуется лишь нормальность матрицы (1). Во-вторых, что более важно, у G. Grünwald'a числа $d_k^{(n)}$ могут принимать значения лишь $O(n^{\rho-\varepsilon})$, в нашей теореме этого не требуется.

Мы покажем на примере, что существуют такие сильно нормальные матрицы, для которых числа $d_k^{(n)}$ растут как $n^{2-\varepsilon}$.

L. Fejer [1] указал следующую сильно нормальную матрицу: n-я строчка матрицы (1) состоит из корней полинома $\omega_n(x) = \int_{-1}^{x} P_{n-1}(t)\,dt$, где $P_{n-1}(x)$ — полином Лежандра степени $n-1$.

Легко доказать, что $\omega_n(x) = c_n(1-x^2)P_{n-1}'(x)$, где c_n — некоторые постоянные числа. Следовательно, $x_1^{(n)} = -1$; $x_n^{(n)} = 1$.

Нетрудно убедиться, что $P_n(1) = 1$, $P_n'(1) = \frac{n(n+1)}{2}$, поэтому $v_n^{(n)}(x) = 1 + \frac{n(n-1)}{2}(1-x)$.

Аналогично $v_1^{(n)}(x) = 1 + \frac{n(n-1)}{2}(1+x)$.

Для остальных узлов $v_k^{(n)}(x) = 1$ $(k = 2, 3, \ldots, n-1)$.

Следовательно, в $[-1, 1]$ $v_k^{(n)}(x) \geqslant 1$ $(k = 1, 2, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots)$ Поэтому, матрица (1) сильно нормальная и $\rho = 1$.

Рассмотрим следующую непрерывную функцию:

$$f(x) = P_0(x) + \frac{P_1(x)}{1^{1+\varepsilon}} + \frac{P_2(x)}{2^{1+\varepsilon}} + \ldots,$$

где $\varepsilon > 0$.

Пусть

$$S_n(x) = P_0(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k(x)}{k^{1+\varepsilon}}.$$

Очевидно, что степень полиномов $S_n(x)$ равна n и $S_n(x) \to f(x)$ равномерно в $[-1, 1]$. Последовательность $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ может быть использована в нашей теореме.

Вычислим $d_n^{(n)}$:

$$S_n'(+1) = d_n^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k'(+1)}{k^{1+\varepsilon}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2k^{1+\varepsilon}} > Cn^{2-\varepsilon}.$$

Ленинградский государственный университет

Поступило 14 VII 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] L. Fejer, Mathemat. Ann., **106**, 1 (1932). [2] G. Grünwald, Acta Math., **75**, 219 (1943).