Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVI, № 9

МАТЕМАТИКА

Б. ЛЕВИТАН

О ПРИБЛИЖЕНИИ N-ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНЫМИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ СУММАМИ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 29 XII 1946)

1. В 1938 г. мной было предложено следующее обобщение почти-периодических функций Бора ([1,2]):

Непрерывная для всех действительных x функция $f(x)$ называется N-почти-периодической, если выполнены следующие два условия:

I. Каковы бы ни были положительные числа ε и N, существует относительно плотное множество чисел τ, для которых

$$|f(x+\tau)-f(x)|<\varepsilon \quad (|x|<N).$$

II. Если τ_1 соответствует, согласно условию I, числу ε, а τ_2 соответствует числу ρ, то $\tau_1 \pm \tau_2$ соответствует числу $\mu=\mu(\varepsilon,\rho)$, причем $\mu(\varepsilon,\rho)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$ и $\rho\to 0$. Кроме этих условий, я предполагал, что

$$\mu(\varepsilon,\rho)=\varepsilon+\lambda(\rho), \tag{1}$$

где $\lambda(\rho)\to 0$ при $\rho\to 0$ и $\varepsilon>$ произвольном*.

При этих условиях мной была доказана теорема о приближении и теорема единственности, причем пришлось опираться на глубокие и трудно доказываемые свойства целых смещений.

Недавно В. А. Марченко ([3]) получил значительно более элементарные доказательства этих теорем. Он также предполагает, что (1) имеет место. В настоящей заметке я привожу доказательство теоремы о приближении N-почти-периодических функций конечными тригонометрическими суммами (и теоремы единственности), не предполагая, что (1) имеет место, а опираясь только на условия I и II. При доказательстве мы существенно воспользуемся теоремой S. Bochner'а о позитивных функциях ([4]).

2. Пусть $\varepsilon>0$ и $N>0$ заданы. Предположим, что в каждом интервале действительной оси длины $l=l(\varepsilon/2)$ найдется хотя бы одно число τ', для которого

$$|f(x+\tau')-f(x)|<\varepsilon/2 \quad (|x|<N+1). \tag{2}$$

Выберем $\delta=\delta(\varepsilon/2)$ (<1) из условия, что

$$|f(x+h)-f(x)|<\varepsilon/2, \text{ если } |h|\leqslant\delta \quad (|x|<N+1). \tag{3}$$

Из неравенств (2) и (3) следует:

$$|f(x+\tau)-f(x)|<\varepsilon, \ |\tau-\tau'|\leqslant\delta \ (|x|<N). \tag{4}$$

---

* Вместо (1) можно требовать, чтобы для каждых $\varepsilon>0$ и $N>0$ числа τ были смещениями некоторой функции Бора

Положим $L=l+2\delta$ и разложим всю действительную ось на интервалы $I_n=(nL,(n+1)L)$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ длины L.

В каждом интервале I_n имеется интервал длины 2δ, все точки τ которого удовлетворяют неравенству (4). Через τ_n обозначим середину последнего интервала. Рассмотрим функцию

$$K_\delta(s)=\begin{cases} L/\delta, \text{ если } |\tau_n-s|\leqslant\delta \ (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \\ 0 \text{ для прочих } s \text{ из интервала } I_n \end{cases}$$

Отметим два очевидных свойства функции $K_\delta(s)$:

1) Равномерно по a существует предел

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T+a}^{T+a} K_\delta(s)\,ds=1.$$

2) Каково бы ни было $\varepsilon>0$, можно указать такое $\xi>0$, что равномерно по a и T

$$\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}|K_\delta(s)-K_\delta(s+h)|\,ds<\varepsilon, \text{ если } |h|\leqslant\xi.$$

3. Рассмотрим функцию

$$\varphi_\delta(t,T)=\frac{1}{2}\int\limits_{-T}^{T} K_\delta(s+t)\,K_\delta(s)\,ds.$$

Пусть $t_1, t_2, \ldots$ — счетное всюду плотное множество чисел на действительной оси. Применяя диагональный процесс Кантора, мы найдем последовательность неограниченно возрастающих положительных чисел $T_1, T_2, \ldots$, для которой существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2T_n}\int\limits_{-T_n}^{T_n} K_\delta(s+t)\,K_\delta(s)\,ds$$

для всех t из выделенной счетной всюду плотной последовательности.

В силу 2) последний предел существует для всех t и определяет непрерывную функцию $\varphi_\delta(t)$. Легко проверить, что $\varphi_\delta(t)$ есть позитивная функция в смысле S. Bochner'a. Поэтому ([4])

$$\varphi_\delta(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\,dV(\lambda)=\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{i\lambda_\nu t}+\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\,dS(\lambda),$$

где $a_\nu>0$, $\sum\limits_{1}^{\infty} a_\nu<\infty$, $S(\lambda)$ — монотонная, непрерывная и ограниченная функция.

4. Нам понадобится еще оценка выражения $\frac{1}{2U}\int\limits_{-U}^{U}\varphi_\delta(x-t,T)\,dt$ $(U>0$ и произвольно). Меняя порядок интегрирования, получим, в силу 1),

$$\frac{1}{2U}\int_{-U}^{U}\varphi_\delta(x-t,T)\,dt=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}K_\delta(s)\,ds\,\frac{1}{2U}\int_{-U}^{U}K_\delta(s+x-t)\,dt=$$

$$=1+\eta, \tag{5}$$

причем $\eta\to\infty$ при $T\to\infty$ и $U\to\infty$ (равномерно по x и t).

5. Рассмотрим теперь функцию

$$g_{U,T}(x)=\frac{1}{2U}\int_{-U}^{U}f(t)\,dt\,\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}K_\delta(s+x-t)\,K_\delta(s)\,ds=$$

$$=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}K_\delta(s)ds\,\frac{1}{2U}\int_{-U+s+x}^{U+s+x}f(x+s-r)\,K_\delta(r)\,dr. \tag{6}$$

В силу (4) и условия II в тех точках, где $K_\delta(s)K_\delta(r)\neq 0$,

$$|f(x+s-r)-f(x)|<\mu(\varepsilon,\varepsilon)\quad(|x|<N).$$

Поэтому, умножив обе части равенства (5) на $f(x)$ и вычтя результат из (6), получим

$$|g_{U,T}(x)-f(x)|\leqslant\eta\max_{-N\leqslant x\leqslant N}|f(x)|+\frac{\mu(\varepsilon,\varepsilon)}{2U}\int_{-U}^{U}\varphi_\delta(x-t,T)\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\eta\max_{-N\leqslant x\leqslant N}|f(x)|+\mu(\varepsilon,\varepsilon)(1+\eta)=\rho.$$

Полагая $T=T_n$ и переходя к пределу $(n\to\infty)$, получим

$$|g_U(x)-f(x)|<\rho\quad(|x|<N),\qquad g_U(x)=\frac{1}{2U}\int_{-U}^{U}f(t)\,\varphi_\delta(x-t)\,dt. \tag{7}$$

6. В дальнейшем будем предполагать, что $f(x)$ удовлетворяет еще условию

$$\overline{\lim_{U\to\infty}}\,\frac{1}{2U}\int_{-U}^{U}|f(t)|^2\,dt<\infty. \tag{8}$$

Теперь мы покажем, что $g_U(x)$ можно приблизить с любой степенью точности тригонометрическим многочленом, причем по мере возрастания точности растет также U. В самом деле,

$$g_U(x)=\frac{1}{2U}\int_{-U}^{U}f(t)\,\varphi_\delta(t-x)\,dt=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu e^{i\lambda_\nu x}\frac{1}{2U}\int_{-U}^{U}f(t)\,e^{-i\lambda_\nu t}\,dt+\frac{1}{2U}\int_{-U}^{U}f(t)\,h(t)\,dt, \tag{9}$$

где $h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}dS(\lambda)$. Так как [4] $\lim_{U\to\infty}\frac{1}{2U}\int_{-U}^{U}|h(t)|^2\,dt=0$, то, в силу (8) и неравенства Шварца, при достаточно больших U,

$$\left|\frac{1}{2U}\int_{-U}^{U}f(t)h(t)\,dt\right|\leqslant\left(\frac{1}{2U}\int_{-U}^{U}|f(t)|^2dt\right)^{1/2}\left(\frac{1}{2U}\int_{-U}^{U}|h(t)|^2dt\right)<\rho. \tag{10}$$

В силу (8) существует такая постоянная положительная величина M, что для всех действительных λ и достаточно больших U (от λ не зависящих) имеет место неравенство $\left|\frac{1}{2U}\int\limits_{-U}^{U} f(t)\, e^{-i\lambda t}\, dt\right| < M$. Пусть $Q > 0$ — целое число, для которого $\sum\limits_{\nu=Q+1}^{\infty} a_\nu < \frac{\rho}{M}$. Тогда для указанных U

$$\left|\sum_{\nu=Q+1}^{\infty} a_\nu e^{i\lambda_\nu x}\, \frac{1}{2U}\int\limits_{-U}^{U} f(t)\, e^{-i\lambda_\nu t}\, dt\right| < \rho. \tag{11}$$

Выберем теперь бесконечную последовательность чисел U_1, $U_2, \ldots, U_n, \ldots$ ($U_n \to \infty$ при $n \to \infty$), для которой существуют пределы

$$A_\nu = \lim \frac{1}{2U_n}\int\limits_{-U_n}^{U_n} f(t)\, e^{-i\lambda_\nu t}\, dt \quad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Положим

$$P_Q(x) = \sum_{\nu=1}^{Q} A_\nu a_\nu e^{-i\lambda_\nu x}.$$

Очевидно, что можно взять n настолько большим, что при $U = U_n$ имеет место (5), (10), (11) и выполняется также неравенство

$$\left|P_Q(x) - \sum_{\nu=1}^{Q} a_\nu e^{i\lambda_\nu x}\, \frac{1}{2U_n}\int\limits_{-U_n}^{U_n} f(t)\, e^{-i\lambda_\nu t}\, dt\right| < \rho. \tag{12}$$

Из (9), (10), (11) и (12) следует при $U = U_n$

$$|g_U(x) - P_Q(x)| < 3\rho,$$

а из последнего неравенства и неравенства (7) следует

$$|f(x) - P_Q(x)| < 4\rho \quad (|x| < N).$$

Так как ρ можно сделать сколь угодно малым, то теорема о приближении N-почти-периодической функции конечными тригонометрическими суммами доказана.

Замечание 1. Если $f(x)$ — функция Бора, то неравенство (7) имеет место равномерно для всех x, и мы получаем теорему о приближении для функций Бора.

Замечание 2. Показатели $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu, \ldots$ могут зависеть от δ, ε и N. Так как мы можем заставить δ и ε стремиться к нулю, а N к бесконечности по некоторым исчислимым последовательностям, то можно считать, что для всех δ, ε, N (из этих последовательностей) показатели $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu, \ldots$ одни и те же.

Из теоремы о приближении следует теорема единственности.

Если непрерывная функция $f(x)$ удовлетворяет условиям I *и* II *и если при всех λ_ν (см. замечание 2) и произвольной последовательности U_n* ($U_n \to \infty$ при $n \to \infty$)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2U_n}\int\limits_{-U_n}^{U_n} f(t)\, e^{-i\lambda_\nu t}\, dt = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots), \text{ то } f(x) \equiv 0.$$

Поступило
29 XII 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Левитан, Зап. Н.-и. ин-та математ. и мех. и Харьковск. матем. об-ва, **15** (1938).
[2] B. Lewitan, Ann. Math., **41** (1940). [3] В. А. Марченко, ДАН, **53**, № 1 (1946).
[4] S. Bochner, Forlesungen über Fouriersche Integrale, 1932.