Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVI, № 9

МАТЕМАТИКА

В. А. ДИТКИН

О ПОЛНОТЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 17 XII 1946)

Множество функций, определенных на интервале $(-\infty, \infty)$ и удовлетворяющих условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(x)|^2\,dx}{(1+x^2)^n} < \infty$$

(в нашем случае n — целое положительное число), образует пространство Гильберта L_n^2, если за скалярное произведение принять

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)\,\overline{g(x)}\,dx}{(1+x^2)^n}. \tag{1}$$

Как известно, всякий линейный функционал в L_n^2 имеет такой же вид, как и (1).

Найдем условие, при котором система функций $f_\lambda(x) = f(x+\lambda)$, где λ — действительное число, будет полной. Для полноты системы $f_\lambda(x)$ необходимо и достаточно, чтобы из

$$(f_\lambda, g) = 0, \quad -\infty < \lambda < +\infty \tag{2}$$

следовало $g(x) = 0$ почти всюду. Полагая в формуле (9) нашей предыдущей заметки [1] $H(\xi) = e^{-i\lambda\xi}$, убеждаемся, что $f_\lambda(x) = e^{-i\lambda D} f$. Поэтому из формулы (11) той же заметки

$$\frac{f(x+\lambda)}{(1+ix)^n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Bigg\{ F(t)\, e^{-i\lambda t} + \sum_{k=1}^{n} (i\lambda)^k \binom{n}{k} \frac{1}{(k-1)!} \int_{-\infty}^{t} (t-\xi)^{k-1} e^{-(t-\xi)} F(\xi)\, e^{-i\lambda\xi}\, d\xi \Bigg\} e^{-ixt}\, dt. \tag{3}$$

Если теперь воспользоваться равенством Парсеваля для интеграла (3) и

$$\frac{g(x)}{(1+ix)^n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(t)\, e^{ixt}\, dt, \tag{4}$$

то найдем

$$(f_\lambda,\ g)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(t)\, e^{-i\lambda t} \sum_{k=0}^{n} (i\lambda)^k \binom{n}{k} \Phi_k(t)\, dt, \tag{5}$$

где

$$\Phi_k(t)=\frac{1}{(k-1)!}\int\limits_{t}^{+\infty}(u-t)^{k-1}e^{-(u-t)}\overline{G}(u)\,du. \tag{6}$$

С другой стороны, обозначая

$$P(i\lambda)=\sum_{k=0}^{n}(i\lambda)^k\binom{n}{k}\Phi_k(t), \tag{7}$$

нетрудно показать

$$\frac{P^{(n-r)}(-1)}{(n-r)!}=(-1)^r\binom{n}{k}\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{r}{k}\Phi_{n-k}(t).$$

Далее, из определения $\Phi_k(t)$ следует

$$\Phi_n^{(r)}(t)=\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{r}{k}\Phi_{n-k}(t),$$

поэтому

$$\frac{P^{(n-r)}(-1)}{(n-r)!}=(-1)^r\binom{n}{r}\Phi_n^{(r)}(t),$$

следовательно,

$$P(i\lambda)=\sum_{r=0}^{n}(1+i\lambda)^{n-r}\frac{P^{(n-r)}(-1)}{(n-r)!}=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}(1+i\lambda)^{n-r}\Phi_n^{(r)}(t). \tag{8}$$

Из (5), (7) и (8) находим

$$(f_\lambda, g)=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}(1+i\lambda)^{n-r}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(t)\,\Phi_n^{(r)}(t)\,e^{-i\lambda t}\,dt$$

или (см. (9) в [1])

$$(f_\lambda, g)=\Phi_n(D_\lambda)f(\lambda).$$

Из условия (2) будет следовать

$$\Phi_n(D_\lambda)f(\lambda)=0. \tag{9}$$

Функция $\Phi_n(\xi)$ непрерывна; поэтому, если $\Phi_n(\xi_0)\neq 0$, то существует окрестность Δ_{ξ_0} точки ξ_0, в которой $\Phi_n(\xi)\neq 0$. Но тогда из (9) и результатов предыдущей заметки (см. (15) и (17) в [1]) почти всюду в Δ_{ξ_0}

$$\frac{d^n}{d\xi^n}(e^{\xi}F(\xi))=0, \tag{10}$$

откуда в окрестности Δ_{ξ_0}

$$F(\xi)=e^{-\xi}(a_0+a_1\xi+\ldots+a_{n-1}\xi^{n-1}). \tag{11}$$

Если не существует точки ξ_0, в окрестности которой $F(\xi)$ удовлетворяет равенству (11), то $\Phi_n(\xi)\equiv 0$, откуда (см. (6)) $G(u)=0$ почти всюду, а следовательно (см. (4)) и $g(x)=0$ почти всюду. Если же в окрестности Δ_{ξ_0} справедливо (11), то существует $\Phi_n(\xi)$, отличная от нуля и удовлетворяющая (9), и, следовательно, существует функционал, не равный тождественно нулю и обращающийся в нуль на множестве $f_\lambda(x)$ для всех λ.

Таким образом, мы доказали:

Для того чтобы система функций $f_\lambda(x)=f(x+\lambda)$ была полной в пространстве L_k^2 $(n\geqslant 1)$, необходимо и достаточно, чтобы не существовало точки ξ_0, в окрестности которой

$$F(\xi)=e^{-\xi}(a_0+a_1\xi+\ldots+a_{n-1}\xi^{n-1}), \tag{12}$$

где

$$F(\xi)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)}{(1+ix)^n}\,e^{ix\xi}dx. \tag{13}$$

Математический институт
им. Стеклова
Академии Наук СССР

Поступило
17 XII 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Диткин, ДАН, **56** № 8 (1947).