Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVI, № 9

МАТЕМАТИКА

И. М. ГУЛЬ

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА ИНЦИДЕНЦИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 23 XII 1946)

Введение. В настоящей работе рассматриваются многозначные непрерывные отображения T (см. определение ниже) замкнутых ориентируемых многообразий M^n в себя, при которых каждой точке $m \in M^n$ ставится в соответствие некоторое точечное множество $T(m) \subset M^n$. Ставится задача об оценке множества неподвижных точек отображения — точек, которые принадлежат к своим образам. В случае, когда множества $T(m)$ — образы точек m — состоят лишь из конечного числа точек, рассматриваемая задача в той постановке, которая будет указана ниже, сведется к исследованной S. Lefschetz'ем ([1]) задаче о сумме индексов неподвижных точек отображения многообразий. S. Lefschetz, а впоследствии и H. Hopf получили формулу, выражающую сумму индексов неподвижных точек через альтернированную сумму следов матриц, определяющих гомоморфизм групп гомологий заданного отображения

$$J = \sum_{\mu=0}^{n} (-1)^{\mu} \sum_{i=1}^{P_\mu} \alpha_{\mu}^{ii}. \tag{1}$$

Наше исследование будет опираться на введенные S. Lefschetz'ем в ([1]) понятия пересечения и произведения в многообразиях, которые мы будем считать известными. Здесь мы напомним используемую нами в дальнейшем формулу, связывающую пересечение произведений цепей с произведением их пересечений:

$$[C^l \times C'^m] \cdot [C^\lambda \times C'^\mu] = (-1)^{(p-l)(q-m)} [C^l \cdot C^\lambda] \times [C'^m \cdot C'^\mu], \tag{2}$$

где цепи C^l и $C^\lambda \subset M^p$, а C'^m и $C'^\mu \subset M^q$.

Определение. Многозначное отображение T' полиэдра A в полиэдр B, ставящее в соответствие каждой точке $a \in A$ некоторые точечные множества $T'(a) \subset B$, мы будем называть непрерывным, если в топологическом произведении $A \times B$ множество Γ всех точек вида $a \times b$, где $a \in A$, а $b \in T'(a)$, компактно.

Мы будем говорить, что точка $a \times b \in A \times B$ проектируется в A в точку a и в B в точку b. Тогда, как нетрудно видеть, образом точки a при многозначном отображении, определяемом некоторым графиком Γ, служит проекция в B пересечения Γ с произведением $a \times B$.

$$T'(a) = (\text{проекция в } B)\, \Gamma \cap [a \times B]. \tag{3}$$

Соответствующим образом с помощью графика Γ определим непрерывное многозначное отображение T n-мерного замкнутого ориентируемого многообразия M^n в себя, которое мы будем изучать. Для этого, наряду с многообразием M^n, рассмотрим копию с него M'^n и топологическое произведение $M^n \times M'^n = M^{2n}$. Заданием в M^{2n} компактного графика Γ будет определено непрерывное отображение T' многообразия M^n в M'^n, при котором точке $m \in M^n$ будет соответствовать некоторое множество $T'(m) \in M'^n$. Копия с этого множества $T'(m)$ в M^n — множество $T(m)$ — и будет, по определению, образом точки m при отображении T многообразия M^n в себя.

Точку $m \in M^n$ такую, что $m \in T(m)$, мы будем называть неподвижной точкой отображения, или, как это принято в алгебраической геометрии, точкой инцидентности. Нашей задачей является исследование множества всех неподвижных точек. Мы дадим оценку этого множества как носителя некоторого цикла. Именно, мы будем исходить из предположения, что график Γ сам является носителем некоторого цикла размерности $n+p$, который будем обозначать через Γ^{n+p}.

Для задач комплексной алгебраической геометрии это предположение является вполне естественным и не ограничительным, так как каждое алгебраическое многообразие естественным образом является носителем цикла.

Цикл Γ^{n+p} при заданном Γ можно, вообще говоря, выбирать поразному. Предполагая Γ^{n+p} выбранным, мы каждому циклу γ^μ (размерности μ) многообразия M^n поставим в соответствие в нем цикл $T(\gamma^\mu)$ размерности $\mu+p$. Этот цикл $T(\gamma^\mu)$ мы определим следующим образом: рассмотрим алгебраическое пересечение цикла Γ^{n+p} с произведением (в смысле Lefschetz'а) $\gamma^\mu \times M'^n$. Получим цикл размерности $\mu+p$, который обозначим через $\Gamma^{\mu+p}$:

$$\Gamma^{\mu+p} = \Gamma^{n+p} \cdot [\gamma^\mu \times M'^n]. \tag{3'}$$

Проектируя цикл $\Gamma^{\mu+p}$ в M'^n, получим в нем некоторый цикл размерности $\mu+p$, который обозначим через $T'(\gamma^\mu)$. Копию с $T'(\gamma^\mu)$ в M^n мы и примем, по определению, за $T(\gamma^\mu)$.

Класс гомологий, к которому принадлежит цикл $T(\gamma^\mu)$ или, что то же самое, $T'(\gamma^\mu)$, мы получим следующим образом: обозначим через γ_h^ν некоторый независимый базис гомологий многообразия M^n и через ${}^*\gamma^{\kappa, n-\nu}$ — базис, дуальный к γ_h^ν, т. е. индексы пересечения $(\gamma_h^\nu \cdot {}^*\gamma^{\kappa, n-\nu}) = a_h^\kappa$, где a_h^κ — символ Кронекера. Базисы γ_h^ν и ${}^*\gamma^{h,\nu}$, вообще говоря, различны и не могут быть совпадающими, так как при $\nu = n/2$ не всегда существует сам себе дуальный базис. Через δ_h^ν и ${}^*\delta^{\kappa, n-\nu}$ обозначим копии с γ_h^ν и ${}^*\gamma^{\kappa, n-\nu}$ в M'^n. Тогда, так как базис гомологий произведения может быть получен с помощью произведения базисных циклов сомножителей, мы можем положить

$$\Gamma^{n+p} \approx \sum_{h,\kappa,\nu} \varepsilon_{h,\, n-\nu}^{\kappa}\, {}^*\gamma^{h,\, n-\nu} \times \delta_\kappa^{\nu+p}, \tag{4}$$

где ν пробегает значения от 0 до $n-p$, а h и k от 1 до $P_\nu = P_{n-\nu}$ (P_ν — ν-мерные числа Betti, ε_h^κ — целые числа).

Заменяя в формуле (3') Γ^{n+p} его выражением из (4) и применяя (2), получим

$$\Gamma^{\mu+p} \approx \sum \varepsilon_{h,n-\nu}^{\kappa} \left[{}^*\gamma^{h,n-\nu} \times \delta_\kappa^{\nu+p}\right] \cdot \left[\gamma^\mu \times M'^n\right] \approx$$

$$\approx \sum \varepsilon_{h,n-\nu}^{\kappa} \left[{}^*\gamma^{h,n-\nu} \cdot \gamma^\mu\right] \times \left[\delta_\mu^{\nu+p} \cdot M'^n\right]. \tag{5}$$

Проектируя $\Gamma^{\mu+p}$ в M'^n и замечая, что при $\nu > \mu^*$ $\gamma^{h,n-\nu}\cdot\gamma^{\mu} \approx 0$, а при $\nu < \mu$ проекция произведения, стоящего в правой части, как $\mu+p$-мерный цикл ≈ 0, мы получим

$$T'(\gamma^{\mu}) \approx \sum \varepsilon^{\kappa}_{h,\,n-\mu}({}^*\gamma^{h,\,n-\mu}\gamma^{\mu})\delta^{\mu+p}_{k}\,, \tag{6}$$

где круглые скобки обозначают индекс пересечения.

Рассмотрим теперь, наряду с отображением T, тождественное отображение T_0 многообразия M^n, при котором каждая точка и каждый цикл этого многообразия переходят сами в себя.

График отображения T_0 есть многообразие, гомеоморфное M^n и взятое с некоторой ориентацией, оно может рассматриваться как цикл. Обозначим этот цикл через Γ^n_0 и положим, аналогично предыдущему:

$$\Gamma^n_0 \approx \sum \varepsilon^{i}_{0j,\mu}\,\gamma^{\mu}_{i} \times {}^*\delta^{j,\,n-\mu} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, P_{\mu}).$$

Тогда вычисления, аналогичные (5) и (6), примененные к базисному циклу ${}^*\gamma^{h,\,n-\nu}$, дают:

$$\Gamma^n_0\left[{}^*\gamma^{h,\,n-\nu} \times M'^n\right] \approx \sum \varepsilon^{i}_{0j,\mu}\left[\gamma^{\mu}_{i} \times {}^*\delta^{j,\,n-\mu}\right]\cdot\left[{}^*\gamma^{h,\,n-\nu} \times M'^n\right] \approx$$

$$\approx \sum \varepsilon^{i}_{0j,\mu}\left[\gamma^{\mu}_{i}\cdot{}^*\gamma^{h,\,n-\nu}\right] \times \left[{}^*\delta^{j,\,n-\mu} \times M'^n\right],$$

откуда, принимая во внимание, что $(\gamma^{\nu}_{i}\,{}^*\gamma^{h,\,n-\nu}) = a^h_i$, так же как и в формуле (6), получим:

$$T'_0({}^*\gamma^{h,n-\nu}) \approx \sum \varepsilon^{h}_{0j,\,\nu}\,{}^*\delta^{j,\,n-\nu}\,. \tag{7}$$

И так как $T'_0({}^*\gamma^{h,\,n-\nu}) = {}^*\delta^{h,\,n-\nu}$, то, следовательно, матрица $\varepsilon^{i}_{0j,\,\mu}$ единичная.

Проекция в M'^n пересечения графиков, определяющих отображения T и T_0, определит множество неподвижных точек отображения T. Вместо пересечения графиков мы рассмотрим пересечение циклов $\Gamma^{n+p}\cdot\Gamma^n_0 = \Gamma^p$, проекцию которого в M'^n обозначим через η^p. Копия с цикла η^p в M^n, цикл ξ^p, очевидно, имеет своим носителем множество неподвижных точек отображения T. Если цикл ξ^p окажется негомологичным нулю, то тем самым мы сможем утверждать, что не является пустым и множество неподвижных элементов. Цикл ξ^p мы назовем неподвижным циклом или циклом инциденций и вычислим класс гомологий, к которому принадлежит этот цикл.

$$\Gamma^p = \Gamma^{n+p}\cdot\Gamma^n_0 \approx \sum \varepsilon^{\kappa}_{h,\,n-\nu}\left[{}^*\gamma^{h,\,n-\nu} \times \delta^{\nu+p}_{\kappa}\right]\cdot\left[\gamma^{\mu}_{i} \times {}^*\delta^{i,\,n-\mu}\right] \approx$$

$$\approx \sum (-1)^{\mu\nu}\,\varepsilon^{\kappa}_{h,\,n-\nu}\left[{}^*\gamma^{h,\,n-\nu}\cdot\gamma^{\mu}_{i}\right] \times \left[\delta^{\nu+p}_{\kappa}\cdot{}^*\delta^{i,\,n-\mu}\right].$$

Проектируя Γ^p в M'^n, аналогично тому, как это делалось в формулах (6) и (7), получим:

$$\eta^p \approx \sum (-1)^{\mu}\varepsilon^{\kappa}_{h,\,n-\mu}({}^*\gamma^{h,\,n-\mu}\gamma^{\mu}_{i})\left[\delta^{\mu+p}_{\kappa}\cdot{}^*\delta^{i,\,n-\mu}\right].$$

Заменив $\sum \varepsilon^{\kappa}_{h,\,n-\mu}({}^*\gamma^{h,\,n-\mu}\,\gamma^{\mu}_{i})\,\delta^{\mu+p}_{\kappa}$, согласно формуле (6), через $T'(\gamma^{\mu}_{i})$ и записывая то же самое в M^n, получим искомую формулу для неподвижного цикла:

$$\xi^p \approx \sum_{\mu=0}^{n-p} (-1)^{\mu} \sum_{i=1}^{P_{\mu}} T(\gamma^{\mu}_{i})\cdot{}^*\gamma^{i,\,n-\mu}. \tag{8}$$

Таким образом, чтобы определить класс гомологий, к которому принадлежит неподвижный цикл, нужно взять альтернированную сумму пересечений по всем размерностям образов базисных циклов с соответствующими циклами дуального к прообразам базиса.

При $p=0$ наша формула переходит в классическую формулу Lefschetz'a ([1]). В самом деле, если α_{μ}^{ij} — матрица, задающая гомоморфизмы групп гомологий непрерывного отображения M^n в себя при $p=0$, т. е. $T(\gamma_i^{\mu})=\sum\limits_j \alpha_{\mu}^{ij}\gamma_j^{\mu}$, то, подставив это выражение образов базисных циклов в нашу формулу и учитывая, что $(\gamma_j^{\mu} * \gamma^{i,\, n-\mu})=a_j^i$, получим

$$J=\sum_{\mu=0}^{n}(-1)^{\mu}\sum_{i=1}^{P_{\mu}}\alpha_{\mu}^{ii}.$$

Пример. Рассмотрим коррелятивное преобразование комплексной проективной плоскости, т. е. проективное преобразование, при котором точкам плоскости ставятся в соответствие прямые этой плоскости. Базисными циклами комплексной проективной плоскости служат точка, прямая и плоскость. В рассматриваемом случае, при наших обозначениях, $n=4$, $p=2$.

Вычислим ξ^p. Образом нульмерного цикла — точки — является прямая. Дуальным к точке циклом будет вся плоскость. Пересечение прямой с плоскостью даст прямую. Образом прямой служит плоскость. Дуальным к прямой циклом будет также прямая. Таким образом, снова получаем пересечение прямой с плоскостью, т. е. опять прямую.

Следовательно, неподвижный цикл ξ^p гомологичен двум прямым. С другой стороны, как известно, точки, лежащие на соответственных им прямых, при коррелятивном преобразовании плоскости (полюсы, принадлежащие своим полярам) образуют кривую 2-го порядка.

Поступило
23 XII 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Lefschetz, Trans. Am. Math. Soc., 28, 1 (1926).