Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVI, № 9

МАТЕМАТИКА

Академик С. Н. БЕРНШТЕЙН

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПРИ ПОМОЩИ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОЙ СТЕПЕНИ

1. В моей заметке ([1]) доказана следующая основная теорема 7:

Если $f(x)$ удовлетворяет условию

$$|f(x)| \leqslant H(x) \quad (-\infty < x < \infty), \tag{1}$$

где $H(x)$ — некоторая четная целая функция с неотрицательными коэффициентами, то *

$$A_p f(x) = \lim_{n=\infty} E_n\left(f(x); \frac{n}{p+0}\right), \quad A_{p-0} f(x) = \lim_{n=\infty} E_n\left(f(x); \frac{n}{p-0}\right). \tag{2}$$

Я хочу указать еще одно интересное простое следствие этой теоремы. Напомню известный результат Н. И. Ахиезера ([2]):

Если вещественная часть $\mathrm{Re}(f(z))$ функции комплексной переменной $f(z)$, регулярной внутри эллипса C с фокусами $+1$ и -1 и малой полуосью b, удовлетворяет на C неравенству

$$-M \leqslant \mathrm{Re} f(z) \leqslant M, \tag{3}$$

то

$$E_n f(x) \leqslant \frac{8M}{\pi} \varphi[(b+\sqrt{b^2+1})^n], \tag{4}$$

где

$$\varphi(q) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1}\left[\frac{1}{q^{2m+1}+q^{-(2m+1)}}\right] < \frac{1}{q} \quad (q>1),$$

причем неравенство (4) *не может быть улучшено.*

Предположим теперь, полагая $z = x \pm iy$, что регулярность $f(z)$ имеет место при $0 \leqslant y < b$ и условие (3) соблюдается при $y = b$. В таком случае из неравенства (4) следует

$$E_n(f(x); \lambda) = E_n(f(\lambda x)) \leqslant \frac{8M}{\pi} \varphi(q_{n,\lambda}), \tag{4bis}$$

---

* Второе из равенств (2) в указанном месте, по недосмотру, записано неточно, а именно, в правой его части вместо $p-0$ было поставлено p. Таким образом, для того, чтобы $A_p f(x)$, рассматриваемая как функция p, была непрерывна в точке $p=p_0$, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{n=\infty} E_n\left(f(x); \frac{n}{p_0+0}\right) = \lim\limits_{n=\infty} E_n\left(f(x); \frac{n}{p_0-0}\right)$.

где $q_{n,\lambda}=\left(\frac{b}{\lambda}+\sqrt{1+\frac{b^2}{\lambda^2}}\right)^{\lambda}$. Таким образом, если $\lambda=n/p$, то $\lim\limits_{n=\infty} q_{n,\lambda}=e^{pb}$. Поэтому

$$A_p f(x)=\lim_{n=\infty} E_n\left(f(x);\frac{n}{p}\right)\leqslant\frac{8M}{\pi}\varphi(e^{pb})<\frac{8M}{\pi}e^{-pb}. \tag{5}$$

Неравенство (5) не может быть улучшено.

Для сокращения дальнейших формулировок удобнее будет предполагать рассматриваемую функцию $f(x)$ ограниченной $(-\infty<x<\infty)$, соответствующее изменение формулировок без этого предположения очевидно. Вследствие (5) и результата, установленного в конце моей заметки ([3]), заключаем, что:

Если функция $f(x)$ ограничена, то условие ([4])

$$\overline{\lim_{p=\infty}}\sqrt[p]{A_p f(x)}\leqslant e^{-b} \tag{6}$$

необходимо и достаточно, чтобы $f(z)$ была ограниченной аналитической функцией внутри бесконечной полосы $z=x\pm ib$.

2. Интересно придать этой теореме форму, не зависимую от комплексной переменной.

Теорема 1. *Условие* (6) ***необходимо и достаточно для того, чтобы ограниченная*** $(-\infty<x<\infty)$ ***функция*** $f(x)$ ***была бесконечно дифференцируема и чтобы***

$$\overline{\lim_{n=\infty}}\max\sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(x)|}{n!}}\leqslant\frac{1}{b}\quad(-\infty<x<\infty). \tag{7}$$

Ввиду того, что из (6) вытекает равномерная ограниченность $|f(x\pm iy)|$ при $0\leqslant y\leqslant b'<b$, для получения (7) достаточно воспользоваться * классической формулой Коши.

Для доказательства обратного утверждения мы воспользуемся неравенством ([6])

$$A_p f(x)\leqslant\frac{\pi}{2}\frac{M_k}{p^k}, \tag{8}$$

которое имеет место при любых $k>0$, $p>0$ для всякой функции, удовлетворяющей условию

$$|f^{(k)}(x)|\leqslant M_k\quad(-\infty<x<\infty). \tag{9}$$

Но (7) означает, что при любом $\varepsilon>0$

$$|f^{(n)}(x)|<\left(\frac{n(1+\varepsilon)}{eb}\right)^n\quad(-\infty<x<\infty) \tag{9 bis}$$

для всех $n\geqslant n_\varepsilon$; поэтому, вследствие (8),

$$A_p f(x)\leqslant\frac{\pi}{2}\left[\frac{n(1+\varepsilon)}{peb}\right]^n,$$

и, в частности, полагая $pb=n(1+\varepsilon)$, находим, что (для достаточно больших p) $A_p f(x)\leqslant e^{-\frac{pb}{1+\varepsilon}}$, откуда следует (6).

Следствие. *Если $f(x)$ ограничена, то условие*

$$\lim_{p=\infty}\sqrt[p]{A_p f(x)}=0 \tag{10}$$

---

* Дальше дано чисто вещественное доказательство более общей теоремы 3.

необходимо и достаточно: 1) *для того чтобы* $f(z)$ *была целой функцией, обладающей свойством, что* $\sup|f(x+iy)|=F(b)<\infty$ *при* $-b<y<b<\infty$ $(-\infty<x<\infty)$, *а также* 2) *для того чтобы*

$$\lim_{n=\infty} \max \sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(x)|}{n!}}=0 \quad (-\infty<x<\infty).$$

Теорема 2. *Для того чтобы* $h_0>1$ *было верхним пределом значений* h, *для которых*

$$\lim_{p=\infty} [A_p f(x)]^{(1/p)^h}=0, \tag{11}$$

необходимо и достаточно, чтобы ограниченная функция $f(x)$ *была целой* * *и чтобы* $\rho_0=\frac{h_0}{h_0-1}>1$ *было нижним пределом значений* ρ, *для которых*

$$\lim_{b=\infty} b^{-\rho}\log F(b)=0. \tag{12}$$

В самом деле, полагая $|f(x)-G_p(x)|\leqslant A_p f(x)=\varepsilon_p^{p^h}$, из (11) заключаем, что (при $|f(x)|\leqslant M$)

$$|f(x\pm ib)|<2Me^{p_0 b}+2\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon_{p_k}^{p_k^h}e^{p_{k+1}b} \qquad (1<h<h_0).$$

Как бы мало ни было $\delta>0$, можем для любого данного b выбрать $p_0\geqslant b^{\frac{1+\delta}{h-1}}$ достаточно большим, чтобы $p_0^{h-1}\log\varepsilon_{p_0}+2b=-\alpha_0<0$. В таком случае, полагая $p_{k+1}=2p_k$, видим, что $|f(x\pm ib)|<2Me^{b^{\frac{h+\delta}{h-1}}}+2\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\alpha_0 p_k}$; следовательно, $\lim_{b=\infty} b^{-\rho}\log F(b)=0$, если $\rho=\frac{h+2\delta}{h-1}$.

Наоборот, из (12), где $\rho>\rho_0>1$, следует, благодаря (5), что при достаточно больших b $A_p f(x)<e^{-pb+b^\rho}$ для любого $p>0$. Поэтому, полагая $p=2b^{\rho-1}$, имеем, при любых данных N и $h<\frac{\rho}{\rho-1}$, $A_p f(x)<e^{-b^\rho}=e^{-(p/2)^{\frac{\rho}{\rho-1}}}<e^{-Np^h}$, если только p достаточно велико; таким образом, $[A_p f(x)]^{(1/p)^h}<e^{-N}$, откуда следует (11).

Это следствие является соответствующим видоизменением и обобщением одной теоремы Ла Валлэ Пуссена (([5]), стр. 150), относящейся к периодическим функциям.

Теорема 3. *Для того чтобы существовало такое число* ** $h>0$, *что*

$$\overline{\lim_{p=\infty}}\, [A_p f(x)]^{(1/p)^h}=e^{-N} \quad (0<N\leqslant\infty), \tag{13}$$

необходимо и достаточно, чтобы ограниченная функция $f(x)$ *была бесконечно дифференцируема и чтобы*

$$\overline{\lim_{m=\infty}} \max \sqrt[m]{\frac{|f^{(mh)}(x)|}{\Gamma(m+1)}}=\frac{1}{N}. \tag{14}$$

---

* Таким образом, необходимо, чтобы порядок целой функции $f(z)$ был не выше $\rho_0=\frac{h_0}{h_0-1}$.

** В отличие от теоремы 2, здесь случай $h<1$ также допускается ($h=1$ соответствует теореме 1).

Применяя то же рассуждение, что при доказательстве теоремы 1, замечаем, что из (14) при произвольно малом $\varepsilon > 0$ вытекает

$$|f^{(mh)}(x)| < \left(\frac{m(1+\varepsilon)}{eN}\right)^m$$

для достаточно больших m; поэтому, полагая $m = p^h N$, заключаем, что

$$A_p f(x) < \frac{\pi}{2}\left[\frac{m(1+\varepsilon)}{eNp^h}\right]^m = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1+\varepsilon}{e}\right)^{p^h N},$$

откуда $\overline{\lim\limits_{p=\infty}} (A_p f(x))^{(1/p)^h} \leqslant e^{-N}$. С другой стороны, из (13) следует, что, каково бы ни было число $N' < N$, полагая $p_{k+1} = (1+\alpha)p_k$, $\alpha > 0$, $I_{n,k} = p_k^n e^{-N' p_k^h}$,

$$|f^{(n)}(x)| < 2Mp_0^n + 2(1+\alpha)^n \sum_{k=0}^{\infty} I_{n,k}$$

при достаточно большом p_0. Замечая $(n = mh)$, что все $I_{n,k} \leqslant \left(\frac{m}{N'e}\right)^m$, обозначим через $p_{k_0} = \sqrt[h]{\frac{m}{N'}}$ величину p, при которой максимум $I_{n,k}$ достигается, и положим $p_{k_0} = p_0(1+\alpha)^{k_0} = p_0 e^{1/h}$. Тогда при $k - k_0 = i \geqslant \frac{2}{h}$

$$I_{n,k} < p_{k_0}^n (1+\alpha)^{in} e^{-N' p_{k_0}^h (1+\alpha)^{ih}} = I_{n,k_0}(1+\alpha)^{in} e^{-m\left[(1+\alpha)^{ih}-1\right]} <$$

$$< I_{n,k_0}\left[(1+\alpha)e^{-\alpha-\frac{\alpha^2}{2}}\right]^{in}.$$

Поэтому, полагая, при n достаточно больших, $n\alpha^2 = 2$, так что $hk_0 = \frac{1}{\lg(1+\alpha)} < \sqrt{n}$, видим, что

$$|f^{(n)}(x)| < 2\left(\frac{m}{N'e}\right)^m \left[M + \left(1 + \sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n \left(\frac{\sqrt{n}+2}{h} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{i=0}^{\infty} e^{-i}\right)\right] < \left(\frac{m}{N''e}\right)^m$$

при любом $N'' < N'$; отсюда следует (14).

Поступило
20 IV 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, ДАН, **54**, № 6 (1946). [2] Н. И. Ахиезер, Лекции по теории апроксимации функций, 1940. [3] С. Н. Бернштейн, ДАН, **51**, № 7 (1946). [4] С. Н. Бернштейн, Изв. АН СССР, сер. математ., 4 (1945). [5] Ch. La Vallée Poussin, Leçons sur l'approximation des fonctions continues, Paris, 1918. [6] С. Н. Бернштейн, ДАН, **57**, № 1 (1947).