Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVI, № 8

МАТЕМАТИКА

А. М. ЯГЛОМ

НЕКОТОРЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕТВЯЩИХСЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 4 IV 1947)

В настоящей заметке теория ветвящихся случайных процессов в смысле ([1]) развивается при следующих предположениях: а) имеется один единственный тип объектов $T_1 = T$; b) все вероятности перехода зависят лишь от разности времен $t = t_2 - t_1$ (однородность во времени); с) вероятности эти рассматриваются лишь для целых значений t. Иначе говоря, рассматривается совокупность объектов типа T, каждый из которых за единицу времени с вероятностью $p_m = P_m(1)$ превращается в m объектов того же типа („потомство" исходного объекта), и ставится задача изучения вероятностей $P_m(t)$ перехода $T \to mT$ за t единиц времени („за t поколений"). Ясно, что все получаемые при этом результаты могут быть без труда обобщены на вероятности $P_m^k(t)$ перехода $kT \to mT$ за t единиц времени.

Для такой схемы естественно в основу всех рассмотрений положить производящую функцию $F(1, x) = f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i x^i$ вероятностей перехода за одно поколение. Основное уравнение (A) общей теории ([1]) в этом случае приводит к уравнению

$$F(t+1, x) = f\{F(t, x)\}, \tag{1}$$

показывающему, что производящая функция $F(t, x) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i(t) x^i$ есть итерация $f_t(x)$ порядка t от функции $f(x)$.

Исходя из уравнения (1), выделенный нами тип ветвящихся случайных процессов изучался (прежде всего в связи с его биологическими применениями) Фишером ([2]), Стеффенсеном ([3]) и Колмогоровым ([4]). Мы здесь изложим некоторые новые результаты, относящиеся к этому же вопросу*.

Введем в рассмотрение три первых факториальных момента распределения вероятностей $\{p_m\}$: $a = f'(1)$, $b = f''(1)$, $c = f'''(1)$ (a есть математическое ожидание числа „потомков" объекта типа T). Тривиальные случаи: α) $a = 0$, β) $a = 1$, $b = 0$ и γ) $a > 1$, $b = a^2 - a$, которым соответствует $p_k = 1$ для какого-то k, мы в дальнейшем исключим из рассмотрения.

* Эти результаты являются ответами на некоторые вопросы, поставленные акад. А. Н. Колмогоровым на руководимом им в 1946—47 г. семинаре по теории вероятностей в Московском государственном университете.

Асимптотическое поведение при $t \to \infty$ вероятностей $P_0(t)$ исчезновения „потомства" объекта типа T за время t и дополнительных к ним вероятностей $Q(t)=1-P_0(t)$ сохранения этого „потомства" выяснено в ([4]). А именно, там показано, что

1) если $a<1$, b конечно, то $P_0(t)\to 1$, $Q(t)\sim Ka^t$, где $K=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1-f_t(0)}{a^t}$ есть положительная константа, зависящая от вида функции $f(x)$;

2) если $a=1$, b, c конечны, то $P_0(t)\to 1$, $Q(t)\sim 2/bt$;

3) если $a>1$, b конечно, то $P_0(t)\to\lambda$, $Q(t)\to 1-\lambda$, где λ есть корень уравнения $f(x)-x=0$, лежащий в промежутке $0\leqslant\lambda<1$ (при $a>1$ такой корень существует и единственен).

Мы здесь будем изучать поведение вероятностей $P_m(t)$ при $m>0$. При этом естественно рассматривать не сами $P_m(t)$, а соответствующие условные вероятности $P_m^*(t)=P_m(t)/Q(t)$ того, что через t поколений потомство объекта типа T будет состоять из m объектов, в предположении, что оно не исчезнет вообще. В случае $a<1$ поведение этих условных вероятностей при $t\to\infty$ описывается следующей теоремой:

Теорема 1. *Если $a<1$ и b конечно, то распределение вероятностей $\{P_m^*(t)\}$ при $t\to\infty$ стремится к некоторому предельному распределению $\{P_m^*\}$, определяемому видом функции $f(x)$. Иначе говоря, при $t\to\infty$ $P_m^*(t)\to P_m^*$, причем $\sum\limits_{i=1}^{\infty}P_i^*=1$. Производящая функция $F(x)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}P_i^*x^i$ этого предельного распределения удовлетворяет функциональному уравнению*

$$F\{f(x)\}=aF(x)+(1-a) \tag{2}$$

и условию $F'(1)=1/K$.

В случае $a\geqslant 1$ все отдельные вероятности $P_m^*(t)$ для $m>0$ при $t\to\infty$ стремятся к нулю. Поэтому при $a\geqslant 1$ естественно подойти к делу несколько иначе. Легко видеть, что условное математическое ожидание численности μ_t потомства объекта типа T в предположении, что $\mu_t>0$, равно $M^*(t)=a^t/Q(t)$. Очевидно, что асимптотически

$$\left.\begin{aligned} M^*(t)&\sim\frac{1}{K} \quad \text{при} \quad a<1,\\ M^*(t)&\sim\frac{b}{2}t \quad \text{при} \quad a=1,\\ M^*(t)&\sim\frac{a^t}{1-\lambda} \quad \text{при} \quad a>1.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Рассмотрим теперь, наряду с μ_t, нормированную величину $\eta_t=\mu_t/M^*(t)$ и соответствующий ей условный закон распределения

$$P(\eta_t<y\mid\eta_t>0)=s_t(y).$$

Относительно этого закона распределения имеют место следующие теоремы:

Теорема 2. *Если $a=1$, $b\neq 0$ и c конечны, то для любой функции $f(x)$ $s_t(y)$ при $t\to\infty$ стремится к распределению*

$$s(y)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad y<0,\\ 1-e^{-y} & \text{при} \quad y\geqslant 0.\end{cases} \tag{4}$$

Теорема 3. *Если $a > 1$ и $b \neq a^2 - a$ конечно, то распределение $s_t(y)$ при $t \to \infty$ стремится к некоторому непрерывному предельному распределению $s(y)$, определяемому видом функции $f(x)$. Характеристическая функция $\psi(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau y}\, ds(y)$ этого предельного распределения удовлетворяет функциональному уравнению*

$$f\{(1-\lambda)\psi(\tau)+\lambda\} = (1-\lambda)\psi(a\tau)+\lambda \tag{5}$$

и условию $\psi'(0) = i$.

Теорема 2 дает для случая $a = 1$ вполне эффективное решение задачи об отыскании предельного условного распределения величины η_t. В теоремах же 1 и 3 наиболее интересным нам кажется утверждение самого факта существования предельных распределений. Нахождение явных выражений для этих предельных распределений в различных конкретных случаях, повидимому, нелегко. Заметим, впрочем, что эти предельные распределения имеют по крайней мере столько же конечных моментов, сколько их имеет распределение $\{p_k\}$. Эти моменты находятся без труда: дифференцируя функциональное уравнение (2) (соответственно, (5)) в точке $x = 1$ $(\tau = 0)$ k раз и используя соответствующее начальное условие, мы получим рекурентное выражение для k-го из искомых моментов через предшествующие моменты и моменты распределения $\{p_k\}$ (этот путь эквивалентен часто применяемому в теории функциональных уравнений нахождению голоморфных решений методом неопределенных коэффициентов).

Мы здесь выпишем лишь в дополнение к формулам (3) формулы, указывающие асимптотическое (при $t \to \infty$) поведение условных дисперсий μ_t (при условии $\mu_t > 0$) и η_t (при условии $\eta_t > 0$):

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_*^2(\mu_t) \sim \frac{1}{K}\left(\frac{b}{a(1-a)} + K - 1\right) && \text{при } a < 1,\\
&\sigma_*^2(\eta_t) \sim 1 && \text{при } a = 1,\\
&\sigma_*^2(\eta_t) \sim \frac{(1-\lambda)b}{a(a-1)} - 1 && \text{при } a > 1.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Наметим теперь вкратце доказательства сформулированных выше теорем.

Доказательство теоремы 1. Характеристическая функция распределения $\{P_m^*(t)\}$ равна

$$\varphi_t^*(\tau) = 1 + \frac{f_t(e^{i\tau}) - 1}{1 - f_t(0)}. \tag{7}$$

В случае $a < 1$ при $t \to \infty$ $\varphi_t^*(\tau) \sim 1 + \frac{f_t(e^{i\tau}) - 1}{Ka^t}$.

Для функций $f(x)$, голоморфных в окрестности точки x_0, для которой $f(x_0) = x_0$, $|f'(x_0)| = a < 1$, Kœnigs доказал, что в окрестности x_0 последовательность $\frac{f_t(x) - x_0}{a^t}$ при $t \to \infty$ равномерно сходится в непрерывной функции $\chi(x)$, удовлетворяющей функциональному уравнению Шредера $\chi\{f(x)\} = a\chi(x)$ и начальным условиям $\chi(x_0) = 0$, $\chi'(x_0) = 1$ (см., например, ([5]), стр. 157 и след.). В условиях теоремы 1 подобные же рассуждения показывают, что при $|x| \leqslant 1$ и $t \to \infty$ $\frac{f_t(x) - 1}{a^t} \to \chi(x)$, где $\chi\{f(x)\} = a\chi(x)$, $\chi(1) = 0$, $\chi'(1) = 1$ (при этом надо только сперва доказать, что при $|x| \leqslant 1$ и $t \to \infty$ $f_t(x) \to 1$). Таким образом, при вещественном τ и $t \to \infty$ $\varphi_t^*(\tau) \to \varphi^*(\tau) = 1 + \frac{\chi(e^{i\tau})}{K}$. Отсюда легко выводятся все утверждения теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Характеристическая функция распределения $s_t(y)$ равна

$$\psi_t(\tau) = 1 + \frac{f_t(e^{i\tau/M^*(t)}) - 1}{1 - f_t(0)}. \tag{8}$$

Используя результаты Фату ((6), стр. 191 и след.) относительно итераций функций вида $g(z) = z + \frac{b}{2} + \frac{\lambda}{|z|}$, где λ ограничено (при $a = 1$ $f(x)$ переходит в функцию такого вида при преобразовании $x \to z = \frac{1}{1-x}$), нетрудно доказать, что при $|x| \leqslant 1$ и $|x - 1|$ достаточно малом $f_t(x) = 1 - (1 - x)\left[1 + \left(\frac{bt}{2} + \Lambda_t \log t\right)(1 - x)\right]^{-1}$, где Λ_t равномерно ограничено для всех t. В силу (8) и (3) отсюда легко следует, что при τ вещественном и $t \to \infty$ $\psi_t(\tau) \to \psi(\tau) = \frac{1}{1 - i\tau}$, что и доказывает теорему 2.

Доказательство теоремы 3. В случае $a > 1$ асимптотически $\psi_t(\tau) \sim \frac{f_t(e^{i(1-\lambda)\tau/a^t}) - \lambda}{1 - \lambda}$. Пусть теперь $h(\xi)$ есть функция, обратная к $f(x)$. В таком случае итерации функции $h(\xi)$ будут обладать свойствами, аналогичными использованным при доказательстве теоремы 1 свойствам итераций $f_t(x)$ при $a < 1$ (с заменой лишь a на $1/a$). Используя эти свойства, нетрудно доказать, что при τ вещественном и $t \to \infty$ последовательность функций $f_t(e^{i\tau/a^t})$ сходится к непрерывной функции $u(\tau)$, обратной к решению уравнения Шредера (откуда следует, что $f\{u(\tau)\} = u(a\tau)$) и такой, что $u(0) = 1$, $u'(0) = i$. Таким образом, при $t \to \infty$ $\psi_t(\tau) \to \psi(\tau) = \frac{u\left(\frac{\tau}{1-\lambda}\right) - \lambda}{1 - \lambda}$.

Отметим еще, что при τ вещественном и $|\tau| \to \infty$ $|\psi(\tau)| \to 0$. Для доказательства этого факта воспользуемся тем, что при $|\tau|$ достаточно малом $|f(e^{i\tau})| < 1$ (так как $b \neq a^2 - a$). Но при $|x| < 1$ $\lim\limits_{t \to \infty} f_t(x) = \lim\limits_{t \to \infty} f_t(0)$ (это следует из того, что $f_t(x) - f(0)$ есть степенной ряд по x с положительными коэффициентами). Отсюда легко вывести, что при достаточно больших t и $|\tau|$ $\psi_t(\tau)$ будет сколь угодно малым.

Из изложенных здесь фактов легко следуют все утверждения теоремы 3.

Поступило
4 IV 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Колмогоров и Н. А. Дмитриев, ДАН, 56, № 1 (1947). [2] R. A. Fisher, The Genetical Theory of Natural Selection, Oxford, 1930. [3] J. F. Steffensen, Ann. Inst. H. Poincaré, 3, 319 (1933). [4] А. Н. Колмогоров, Изв. н.-и. ин-та матем. и мех. Томск. гос. ун-та, 2, 1 (1938). [5] E. Picard, Leçons sur quelques équations fonctionelles, Paris, 1928. [6] P. Fatou, Bull. Soc. Math. France, 47, 161 (1919).