Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVI, № 8

МАТЕМАТИКА

И. Е. ОГИЕВЕЦКИЙ

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМ ДИРИХЛЕ И АДАМАРА НА КВАЗИ-РАВНОМЕРНО СХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 14 XII 1946)

Критериям сходимости рядов $\sum_{i=1}^{\infty} u_i(x) v_i(x)$ посвящены теоремы Дюбуареймона, Дедекинда и Дирихле, Абеля (1) и Адамара (2). Вопрос о равномерной сходимости этих рядов является также содержанием заметок автора (3). В настоящей заметке излагаются теоремы о критериях квази-равномерной сходимости рядов $\sum_{i=1}^{\infty} u_i(x) v_i(x)$. Рассмотрение этого вопроса представляется нам не лишенным интереса, так как квази-равномерная сходимость является необходимым и достаточным условием почленного интегрирования рядов в смысле Римана, а также того, что сумма ряда непрерывных функций представляет собою непрерывную функцию и имеет приложение в других вопросах.

Определение. Функциональный ряд, согласно Борелю, сходится квази-равномерно на сегменте $[a, b]$, если ряд этот сходится в $[a, b]$ и любому малому $\varepsilon > 0$, а также каждому сколь угодно большому N можно поставить в соответствие число N' так, чтобы неравенство $N < n < N'$ выполнялось для значений n, зависящих от x, но всегда содержащихся между N и N'.

Теорема 1. *Для того чтобы при помощи последовательности функций $\alpha_i(x)$, равномерно сходящейся к нулю в $[a, b]$, ряд $\sum_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ с равномерно ограниченными частными суммами преобразовался в ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(x) u_i(x)$, квази-равномерно сходящийся в $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы $\sum_{i=1}^{\infty} |\Delta\alpha_i(x)|$ сходился квази-равномерно в $[a, b]$, причем $\Delta\alpha_i(x) = \alpha_i(x) - \alpha_{i+1}(x)$.*

В самом деле, согласно преобразованию Абеля

$$\sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i(x) u_i(x) = \sum_{i=m+1}^{n} S_i(x) \Delta\alpha_i(x) - S_m(x) \alpha_{m+1}(x) + S_n(x) \alpha_{n+1}(x), \quad (1)$$

где
$$S_n(x)=\sum_{i=1}^{n} u_i(x).$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$, находим

$$\sum_{i=m+1}^{\infty}\alpha_i(x)\,u_i(x)=\sum_{i=m+1}^{\infty}S_i(x)\,\Delta\alpha_i(x)-S_m(x)\,\alpha_{m+1}(x). \tag{2}$$

Вследствие равномерной сходимости $\alpha_m(x)$ можно взять m настолько большим, чтобы

$$|S_m(x)|<M,\qquad |\alpha_m(x)|<\varepsilon/M. \tag{3}$$

Обозначим

$$R'_{n_x}(x)=\sum_{i=n_x}^{\infty}\alpha_i(x)\,u_i(x), \tag{4}$$

$$R_{n_x}=\sum_{i=n_x}^{\infty}|\Delta\alpha_i(x)|, \tag{5}$$

где $n_x\geqslant m+1$.

Из квази-равномерной сходимости $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|\Delta\alpha_i(x)|$ следует, что существует целое N', превышающее N, такое, что для всякого $x\subset[a,b]$

$$|R_{n_x}(x)|=\sum_{i=n_x}^{\infty}|\Delta\alpha_i(x)|<\frac{\varepsilon}{2M}, \tag{6}$$

где $N<n_x<N'$.

Тогда из (2) следует, так как $n_x>m$, что

$$|R'_{n_x}(x)|=\left|\sum_{i=n_x}^{\infty}\alpha_i(x)\,u_i(x)\right|<\varepsilon,$$

т. е. что ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\alpha_i(x)\,u_i(x)$ сходится квази-равномерно в $[a,b]$.

Докажем необходимость условия. В самом деле, предположим, что $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|\Delta\alpha_i(x)|$ не сходится квази-равномерно. Рассмотрим специальный ряд, для которого

$$S_i(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn}\Delta\alpha_i(x) & \text{для } i=n_x+1,\ n_x+2,\ \ldots\\ 0 & \text{для } 1<i<n_x.\end{cases}$$

Для этого ряда (2) записывается:

$$\sum_{i=n_x}^{\infty}\alpha_i(x)\,u_i(x)=\sum_{i=n_x}^{\infty}|\Delta\alpha_i(x)|. \tag{7}$$

Тогда из неравномерной сходимости (5) следует неравномерная сходимость $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\alpha_i(x)\,u_i(x)$.

Следствие 1. Для того чтобы при помощи последовательности непрерывных функций $\alpha_i(x)$, равномерно сходящейся к нулю, любой ряд непрерывных функций $\sum_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ с равномерно ограниченными частными суммами преобразовывался в ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(x) u_i(x)$, сходящийся в $[a, b]$ к непрерывной функции, необходимо и достаточно, чтобы ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |\Delta\alpha_i(x)|$ сходился квази-равномерно в этом сегменте.

Следствие 2. Для того чтобы ряд непрерывных функций $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(x)$, где $\alpha_i(x)$ равномерно сходится к нулю в $[a, b]$, сходился к непрерывной функции, достаточно, чтобы $\sum_{i=1}^{\infty} |\Delta\alpha_i(x)|$ сходился квази-равномерно в $[a, b]$.

В самом деле, всякий ряд

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots=u_1(x)-[-u_2(x)]+\ldots=$$
$$=u_1'(x)-u_2'(x)+\ldots=\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}u_i'(x).$$

Теорема 2. *Для того чтобы при помощи последовательности функций $\alpha_i(x)$, равномерно ограниченной на сегменте $[a, b]$, любой ряд $\sum_{i=1}^{\infty} u_i(x)$, равномерно сходящийся в $[a, b]$, преобразовывался в ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(x) u_i(x)$, квази-равномерно сходящийся в $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы $\sum_{i=1}^{\infty} |\Delta\alpha_i(x)|$ сходился квази-равномерно на этом сегменте.*

В самом деле, согласно преобразованию Абеля

$$\sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i(x) u_i(x) = \sum_{i=m+1}^{\infty} [S_i(x)-S(x)]\,\Delta\alpha_i(x) -$$
$$-[S_m(x)-S(x)]\,\alpha_{m+1}(x)+[S_n(x)-S(x)]\,\alpha_{n+1}(x). \qquad (8)$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$, находим

$$\sum_{i=m+1}^{\infty} \alpha_i(x) u_i(x) = \sum_{i=m+1}^{\infty} [S_i(x)-S(x)]\,\Delta\alpha_i(x) -$$
$$-[S_m(x)-S(x)]\,\alpha_{m+1}(x). \qquad (9)$$

Вследствие равномерной сходимости $\sum_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ можно взять m настолько большим, чтобы

$$|S_m(x)-S(x)|<\varepsilon/M, \qquad |\alpha_m(x)|<M.$$

Отсюда находим, как в предыдущей теореме, что из квази-равномерной сходимости $\sum_{i=1}^{\infty} |\Delta\alpha_i(x)|$ следует квази-равномерная сходимость $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(x) u_i(x)$.

Для доказательства необходимости условия рассмотрим специальный ряд

$$S_i(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} \Delta\alpha_i(x) 2^{-k} & \text{для } p_k + 1 < i \leqslant p_{k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{для } 0 \leqslant i \leqslant p_1 + 1, \quad i = p_2 + 1, p_3 + 1, \ldots \end{cases} \tag{10}$$

Пусть $m+1 = p_1 + 1 = n_x$, тогда для этого ряда (9) записывается:

$$\sum_{i=p_1+1}^{\infty} \alpha_i(x) u_i(x) = \sum_{i=p_1+1}^{p_2+1} |\Delta\alpha_i(x)| \frac{1}{2} +$$

$$+ \sum_{i=p_2+2}^{p_3+1} |\Delta\alpha_i(x)| \frac{1}{2^2} + \ldots \sum_{i=p_k+2}^{p_{k+1}+1} |\Delta\alpha_i(x)| \frac{1}{2^k} + \ldots \tag{11}$$

Если $\sum_{i=1}^{\infty} |\Delta\alpha_i(x)|$ не сходится квази-равномерно, то также не будет сходиться квази-равномерно правая часть (11), а следовательно, и левая часть (11).

Следствие 1. Для того чтобы при помощи последовательности функций $\alpha_i(x)$, равномерно ограниченных и непрерывных в сегменте $[a, b]$, любой ряд непрерывных функций $\sum_{i=1}^{\infty} u_i(x)$, равномерно сходящийся в $[a, b]$, преобразовывался в ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(x) u_i(x)$, сходящийся к функции, непрерывной в $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы $\sum_{i=1}^{\infty} |\Delta\alpha_i(x)|$ сходился квази-равномерно на этом сегменте.

Поступило
14 XII 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] K. Knopp, Theorie der unendlichen Reihen, 1931, §§ 43, 48. [2] J. Hadamard, Acta Mathemat., 27 (1903). [3] И. Е. Огиевецкий, ДАН, 31, № 3 (1941); Изв. АН СССР, 6, № 6 (1941); ДАН, 51, № 9 (1946).