Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVI, № 8

МАТЕМАТИКА

П. С. НОВИКОВ

О МОЩНОСТИ МНОЖЕСТВА СВЯЗНЫХ КОМПОНЕНТ A-МНОЖЕСТВА

(Представлено академиком Н. Н. Лузиным 21 XI 1946)

В настоящей статье мы рассмотрим вопрос о мощности связных компонент A-множества, расположенного в n-мерном евклидовом или гильбертовом пространстве. Мы докажем, что число таких компонент может быть или конечно, или счетно, или континуум, и, таким образом, решим для указанного случая задачу полностью.

Пусть $\{E_\delta\}$ — счетная последовательность A-множеств, занумерованных бэровскими интервалами δ, и E_ξ — пересечение $\prod_{n=1}^{\infty} E_{\delta_n}$, где $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ — бесконечная последовательность бэровских интервалов, соответственно $1, 2, \ldots, n, \ldots$ ранга таких, что $\prod_{n=1}^{\infty} \delta_n = \xi$, где ξ — точка бэровского пространства.

Лемма. *Совокупность точек ξ бэровского пространства, для которых E_ξ непусто, есть A-множество.*

Эта лемма легко вытекает из хорошо известных свойств A-операции.

Н. Н. Лузин (1) доказал следующую теорему.

Пусть $E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset E_\alpha \supset \ldots$ — трансфинитная последовательность множеств типа F_σ, расположенных в евклидовом пространстве, причем $E_\alpha = \prod_{\beta<\alpha} E_\beta$, если α предельное число. Тогда, начиная с некоторого μ, $E_\mu = E_{\mu+1} = \ldots = E_{\mu+\lambda} = \ldots$

Последовательности, обладающие таким свойством, Н. Н. Лузин назвал стационарными.

Легко, однако, видеть, что теорема Лузина распространяется и на случай, когда E_α — множество типа F_σ относительно некоторого A-множества, расположенного в евклидовом пространстве.

Теорема. *Мощность множества компонент некоторого A-множества, расположенного в евклидовом пространстве, или конечна, или счетна, или континуум.*

Доказательство. Пусть E — данное множество. Определим некоторую трансфинитную последовательность множеств $E^0, E^1, \ldots, \ldots, E^\alpha, \ldots$, где $\alpha < \Omega$, путем трансфинитной индукции. Множество E^α мы будем определять в форме счетной суммы $\sum_{n=1}^{\infty} E_n^\alpha$, причем слагаемые E_n^α будут сами определяться нашей индукцией.

Пусть $E^0 = E$, $E_1^0 = E$, E_i^0 для $i \neq 1$ пусты. Пусть для всех $\beta < \alpha$ множества E^β и E_n^β уже определены. Рассмотрим случай, когда α — число первого рода. Тогда по условию определены множества $E_n^{\alpha-1}$. Из этого семейства множеств удалим все связные, если такие есть. Затем каждое несвязное множество $E_n^{\alpha-1}$ разобьем как-нибудь на две замкнутые на нем непустые части $E_n^{\alpha-1} = P + S$. Совокупность всех полученных таким образом множеств перенумеруем в виде последовательности, дополнив их пустыми множествами, если их число оказалось конечным. Сумма полученной последовательности будет E_n^α, а члены этой последовательности будут множества E_n^α.

Рассмотрим случай, когда α — число второго рода. Составим произведение $\prod\limits_{\beta < \alpha} E^\beta = \prod\limits_{\beta < \alpha} \sum E_n^\beta$. Это произведение можно представить в виде суммы произведений $\sum\limits_{n_0 n_1 \ldots n_\beta \ldots} E_{n_0}^0 \cdot E_{n_1}^1 \ldots E_{n_\beta}^\beta \ldots$, в которой суммирование происходит по всем трансфинитным последовательностям $n_0, n_1, \ldots, n_\beta, \ldots$, где β пробегает все числа, меньшие α, а n_β — целые числа.

Возможны два случая: 1) число непустых слагаемых последней суммы несчетно или их вовсе нет, 2) число этих слагаемых не более чем счетно. В первом случае мы положим, что E_n^α и E^α — пустые множества. Во втором случае последовательность множеств E_n^α будет включать все непустые слагаемые $E_{n_0}^0 \cdot E_{n_1}^1 \ldots E_{n_\beta}^\beta \ldots$

В случае, когда непустых слагаемых $E_{n_0}^0 \cdot E_{n_1}^1 \ldots E_{n_\beta}^\beta \ldots$ оказалось конечное число, мы дополняем последовательность E_n^α пустыми членами. Определив множества E_n^α, мы определяем и E^α как сумму множеств E_n^α.

Таким образом, мы определим множества E_n^α и E^α для всякого $\alpha < \Omega$ и всякого целого n. Непосредственно из определения легко вывести следующие свойства трансфинитной последовательности множеств E^α и E_n^α.

1. $E^{\alpha'} \supset E^{\alpha''}$, если $\alpha' \leqslant \alpha''$.

2. Если α — число второго рода и E^α непусто, то $E^\alpha = \prod\limits_{\beta < \alpha} E^\beta$.

3. Если произведение $E_{n_0}^0 \cdot E_{n_1}^1 \ldots E_{n_\beta}^\beta \ldots$, $\beta < \alpha$, непусто, то $E_{n_0}^0 \supset E_{n_1}^1 \supset \ldots \supset E_{n_\beta}^\beta \supset \ldots$

4. Два различных множества $E_{n'}^\alpha$ и $E_{n''}^\alpha$ не имеют общих точек. То же справедливо для произведений $E_{n_0}^0 \cdot E_{n_1}^1 \ldots E_{n_\beta}^\beta \ldots$

5. Любая компонента множества E, имеющая точки в множестве E_n^α, целиком принадлежит E_n^α. То же справедливо и для произведений $E_{n_0}^0 \cdot E_{n_1}^1 \ldots E_{n_\beta}^\beta \ldots$

6. Множества E_n^α замкнуты на E.

7. Если E^α непусто, то оно содержит все, кроме, может быть, конечного или счетного числа, компоненты E.

8. Каждое непустое E_n^α содержится в одном и только в одном из множеств E_n^β, где $\beta < \alpha$.

Каждое множество E^α, на основании 6, есть F_σ на E. Если какое-нибудь из множеств E^α пусто, то, на основании 1, все последующие также пусты. В этом случае последовательность, по терминологии

Н. Н. Лузина, стационарна. Если все множества E^{α} непусты, то, на основании 1 и 2, последовательность также стационарна в силу теоремы Лузина. Итак, последовательность E^{α} всегда стационарна. Это значит, что существует такое число μ, что $E^{\mu}=E^{\mu+1}=\ldots=E^{\mu+\lambda}=\ldots$ Будем считать, что μ означает наименьшее из таких чисел. В таком случае $E^{\alpha}\neq E^{\mu}$, если $\alpha<\mu$.

Рассмотрим сначала случай, когда E^{μ} пусто, и покажем, что если в этом случае число компонент E несчетно, то оно есть континуум.

Пусть μ — число первого рода. Тогда $E^{\mu-1}$ непусто. Число непустых слагаемых $E_n^{\mu-1}$ конечно или счетно. Все эти слагаемые должны быть связны. В противном случае из каждого несвязного множества $E_n^{\mu-1}$ образовались бы два непустых множества P и S, представляющих собой множества E_m^{μ}, чего не может быть, так как E^{μ} пусто. Итак, каждое непустое $E_n^{\mu-1}$ связно. В таком случае, в силу 5, оно представляет собой компоненту множества E. Итак, $E^{\mu-1}$ содержит не более, чем счетное, число компонент E, тогда, на основании 7, число всех компонент E не более, чем счетно.

Рассмотрим случай, когда μ — число второго рода. Выделим последовательность чисел $\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_n<\ldots$, сходящуюся к μ. В силу 1 $\prod\limits_{\beta<\mu} E^{\beta}=\prod\limits_{n=1}^{\infty} E^{\alpha_n}$. В силу 3, каждое непустое из произведений $E_{n_0}^{0}\cdot E_{n_1}^{1}\ldots E_{n_\beta}^{\beta}\ldots$, $\beta<\mu$, совпадает с $E_{n_{\alpha_1}}^{\alpha_1}\cdot E_{n_{\alpha_2}}^{\alpha_2}\ldots E_{n_{\alpha_k}}^{\alpha_k}\ldots$ Обратно, для каждого непустого произведения $E_{n_{\alpha_1}}^{\alpha_1}\cdot E_{n_{\alpha_2}}^{\alpha_2}\ldots E_{n_{\alpha_k}}^{\alpha_k}\ldots$, на основании 8, существует единственное произведение $E_{n_0}^{0}\cdot E_{n_1}^{1}\ldots E_{n_\beta}^{\beta}\ldots$, $\beta<\mu$, которое с ним совпадает.

В силу сказанного семейства непустых множеств вида $E_{n_0}^{0}\cdot E_{n_1}^{1}\ldots E_{n_\beta}^{\beta}\ldots$, $\beta<\mu$, и $E_{n_{\alpha_1}}^{\alpha_1}\cdot E_{n_{\alpha_2}}^{\alpha_2}\ldots E_{n_{\alpha_k}}^{\alpha_k}\ldots$ совпадают.

$$\prod_{n=1}^{\infty} E^{\alpha_n}=\prod_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} E_k^{\alpha_n}=\sum_{k_1 k_2\ldots k_n} E_{k_1}^{\alpha_1}\cdot E_{k_2}^{\alpha_2}\ldots E_{k_n}^{\alpha_n}\ldots,$$

где $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$ — всевозможные последовательности целых чисел. Так как E^{μ} пусто, то множество непустых произведений $E_{n_0}^{0}\cdot E_{n_1}^{1}\ldots E_{n_\beta}^{\beta}\ldots$, $\beta<\mu$, или несчетно или пусто. В последнем случае все множества $E_{k_1}^{\alpha_1}\cdot E_{k_2}^{\alpha_2}\ldots E_{k_n}^{\alpha_n}\ldots$ также будут пусты и, следовательно, $\prod\limits_{n=1}^{\infty} E^{\alpha_n}=\prod\limits_{\beta<\mu} E^{\beta}$ — пустое множество. Тогда, на основании 7, число всех компонент E не более, чем счетно. Предположим, что множество непустых произведений $E_{n_0}^{0}\cdot E_{n_1}^{1}\ldots E_{n_\beta}^{\beta}\ldots$, $\beta<\mu$, несчетно. Тогда множество непустых произведений $E_{k_1}^{\alpha_1}\cdot E_{k_2}^{\alpha_2}\ldots E_{k_n}^{\alpha_n}\ldots$ также несчетно.

Рассмотрим множество последовательностей $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$ как бэровское пространство, как это делается обычным образом. Пусть δ есть бэровский интервал, определенный кортежем $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Пусть E_δ будет произведение $E_{k_1}^{\alpha_1}\cdot E_{k_2}^{\alpha_2}\ldots E_{k_n}^{\alpha_n}$, а E_ξ, где ξ есть последовательность $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$, тогда будет $\prod\limits_{n=1}^{\infty} E_{k_n}^{\alpha_n}$.

Все E_δ — A-множества. Применяя к этой системе множеств приведенную лемму, мы можем сказать, что множество всех точек ξ, для которых E_ξ непусты, есть A-множество. Но совокупность непустых множеств E_ξ есть не что иное, как совокупность непустых множеств $E_{k_1}^{\alpha_1} \cdot E_{k_2}^{\alpha_2} \ldots E_{k_n}^{\alpha_n} \ldots$, следовательно, есть в то же время совокупность непустых произведений $E_{n_0}^0 \cdot E_{n_1}^1 \ldots E_{n_\beta}^\beta \ldots, \beta < \mu$. По предположению, однако, множество этих произведений несчетно и, следовательно, множество ξ, для которых E_ξ непусто, также несчетно. Но так как это множество есть A-множество, то оно имеет мощность континуум. Каждое из таких множеств, на основании 5, содержит целиком хотя бы одну компоненту E, и, кроме того, два различных E_{ξ_1} и E_{ξ_2} общих точек не имеют. Поэтому в рассматриваемом случае число компонент E есть также континуум.

Итак, мы показали, что если E^μ пусто, то число компонент E конечно, счетно или континуум. Покажем, что E^μ не может быть непусто.

Допустим противное. Тогда множество E^μ содержит какую-нибудь компоненту E, например H; для каждого числа λ одно и только одно из множеств $E_{n_\lambda}^{\mu+\lambda}$ содержит компоненту H.

Рассмотрим последовательность множеств $E_{n_0}^\mu, E_{n_1}^{\mu+1}, \ldots, E_{n_\lambda}^{\mu+\lambda}, \ldots$, содержащих H. На основании 4, 8 имеет место $E_{n_0}^\mu \supset E_{n_1}^{\mu+1} \supset \ldots \ldots \supset E_{n_\lambda}^{\mu+\lambda} \ldots$ Эти множества замкнуты на E, следовательно, последовательность стационарна, и, начиная с некоторого числа η, мы будем иметь $E_{n_\eta}^{\mu+\eta} = E_{n_{\eta+1}}^{\mu+\eta+1} = \ldots$ Если $E_{n_\eta}^{\mu+\eta}$ — связное множество, то оно есть компонента E. Но в таком случае в $E^{\mu+\eta+1}$ точек $E_{n_\eta}^{\mu+\eta}$ быть не может по определению. Следовательно, $E^{\mu+\eta+1} \neq E^{\mu+\eta}$, и мы пришли к противоречию.

Если $E_{n_\eta}^{\mu+\eta}$ несвязно, то оно разбивается на непустые на нем части, которые войдут в число слагаемых суммы $\sum\limits_{n=1}^{\infty} E_n^{\mu+\eta+1}$. Эти части поэтому можно обозначить $E_{n'}^{\mu+\eta+1}$ и $E_{n''}^{\mu+\eta+1}$. Компонента H может принадлежать только одной из частей, например $E_{n'}^{\mu+\eta+1}$. Но тогда $E_{n_{\eta+1}}^{\mu+\eta+1} = E_{n'}^{\mu+\eta+1}$. Этого, однако, быть не может, так как $E_{n_{\eta+1}}^{\mu+\eta+1}$ совпадает с $E_{n_\eta}^{\mu+\eta}$, а $E_{n'}^{\mu+\eta+1}$ не совпадает с $E_{n_\eta}^{\mu+\eta}$.

Итак, мы приходим к противоречию, предположив, что E^μ пусто, и теорема доказана.

Таким образом, вопрос о мощности множества всех компонент A-множества решен. Остается открытым вопрос о мощности множества всех одноточечных компонент. Этот вопрос остается открытым даже для случая плоского G_δ.

Поступило
21 XI 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Н. Лузин, Тр. Ин-та им. Стеклова, 5, 125 (1934).