Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVI, № 8

МАТЕМАТИКА

Академик А. Н. КОЛМОГОРОВ и Б. А. САВОСТЬЯНОВ

ВЫЧИСЛЕНИЕ ФИНАЛЬНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛЯ ВЕТВЯЩИХСЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Настоящая заметка примыкает в отношении терминологии и обозначений к ([1]). Мы рассматриваем далее однородную по t дискретную схему: t пробегает только значения 1, 2, 3, ... и может трактоваться как „номер поколения" рассматриваемой частицы. В соответствии с этим

$$P_k^\alpha(t) = P(T_k \to \alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2 + \ldots + \alpha_n T_n \mid t) \tag{1}$$

есть вероятность того, что одна частица типа T_k даст через t поколений по $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ частиц типов $T_1, T_2, \ldots, T_n$. В основе всех дальнейших подсчетов лежат производящие функции

$$F_k(1; x) = f_k(x) = \sum_\alpha p_k^\alpha x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_n} \ldots x_n^{\alpha_n} \tag{2}$$

вероятностей

$$p_k^\alpha = P_k^\alpha(1) \tag{3}$$

различных переходов за одно поколение. Через них по индукции определяются производящие функции

$$F_k(t; x) = \sum_\alpha P_k^\alpha(t) x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} \tag{4}$$

для всех натуральных значений t:

$$F_k(t+1; x) = f_k\{F_1(t; x), F_2(t; x), \ldots, F_n(t; x)\}. \tag{5}$$

В соответствии с общей теорией, изложенной в ([1]),

$$p_k^{(0,0,\ldots,0)} = f_k(0, 0, \ldots, 0) \tag{6}$$

обозначает вероятность того, что частица типа T_k за одно поколение исчезнет, не произведя никаких новых частиц рассматриваемых типов $T_1, T_2, \ldots, T_n$. Для дальнейшего целесообразно избавиться от этой возможности и рассматривать только схемы, в которых

$$f_k(0, 0, \ldots, 0) = 0. \tag{7}$$

Если условие (7) не выполняется в какой-либо схеме, то всегда можно ввести дополнительный фиктивный тип T_{n+1} и считать, что исчезновение частицы любого другого типа обозначает превращение ее в частицу типа T_{n+1}, частицы же типа T_{n+1} остаются далее неизменными. Аналитически это равносильно переходу от первоначальной системы производящих функций $f_1, f_2, \ldots, f_n$ к новой системе

$$\bar{f}_k(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = f_k(x_1, \ldots, x_n) + (x_{n+1}-1) f_k, (0, 0, \ldots, 0),$$

$$k = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\bar{f}_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = x_{n+1}. \tag{8}$$

Во всем дальнейшем мы предполагаем условие (7) выполненным уже для первоначальной системы типов $T_1, T_2, \ldots, T_n$ и функций $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Группа типов $T_{k_1}, T_{k_2}, \ldots, T_{k_m}$ называется замкнутой, если частица любого типа группы производит только частицы, принадлежащие типам той же группы. Система всех типов $T_1, T_2, \ldots, T_n$ разложима, если ее можно разбить на две замкнутые группы. Естественно ограничиться рассмотрением неразложимых систем типов. Так мы и делаем во всем дальнейшем.

Группа типов называется финальной, если: а) она замкнута; б) каждая частица любого из типов группы всегда производит ровно одну частицу; в) она не содержит в себе никакой меньшей группы, обладающей свойствами а) и б).

Легко видеть, что две финальные группы не имеют общих элементов. Поэтому вся система типов $T_1, T_2, \ldots$, состоит, вообще говоря, из некоторого числа финальных групп $\Psi_r = \{T_{r1}, T_{r2}, \ldots, T_{rn_r}\}$, $r = 1, 2, \ldots, s$, и некоторого числа типов $T_{01}, T_{02}, \ldots, T_{on_0}$, не принадлежащих финальным группам. При этом $n_0 + n_1 + \ldots + n_s = n$.

Мы будем считать процесс закончившимся, когда остались лишь частицы типов, входящих в финальные группы. Такое понимание естественно, так как потомство частицы типа, принадлежащего к финальной группе, в любом дальнейшем поколении будет состоять из одной частицы типа, принадлежащего к той же финальной группе, переходы же из одного типа в другой тип в пределах финальной группы управляются хорошо изученными законами так называемых „цепей Маркова“ в их простейшей форме, соответствующей предположению, что все „состояния“ „существенны“ и образуют один „класс“ (см., например, (2)).

Будем обозначать

$$q_k^{\beta} = P(T_k \to \beta_1 \Psi_1 + \beta_2 \Psi_2 + \ldots + \beta_s \Psi_s \mid \infty) \tag{9}$$

вероятность того, что эволюция всего потомства одной частицы типа рано или поздно закончится на том, что останется по β_r частиц, принадлежащих типам финальных групп Ψ_r.

$$Q_k = \sum_{\beta} q_k^{\beta} \leqslant 1 \tag{10}$$

есть полная вероятность того, что процесс развития потомства одной частицы рано или поздно закончится (в указанном выше смысле).

Введем производящие функции

$$\varphi_k(u_1, u_2, \ldots, u_s) = \sum_{\beta} q_k^{\beta} u_1^{\beta_1} u_2^{\beta_2} \ldots u_s^{\beta_s}. \tag{11}$$

В соответствии с двойным обозначением типов частиц функцию φ_k, соответствующую типу $T_k = T_{rm}$, будем иногда обозначать φ_{rm}. Так как $q_k^{\beta} \geqslant 0$, то, в силу (10), функции (11) во всяком случае определены и аналитичны по всем переменным при

$$0 \leqslant u_r < 1, \quad r = 1, 2, \ldots, s. \tag{12}$$

Когда некоторые из переменных достигают значения 1, то аналитичность может потеряться, но непрерывность сохраняется. В частности,

$$\varphi_k(1, 1, \ldots, 1) = Q_k. \tag{13}$$

Из вероятностных соображений легко вывести следующее основное для нас соотношение:

$$\varphi_k = f_k(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{14}$$

Кроме того, из определения финальных групп можно вывести, что

$$\varphi_{rm} = u_r, \quad m = 1, 2, \ldots, n_r, \quad r = 1, 2, \ldots, s. \tag{15}$$

Уравнения системы (14), для которых номер k соответствует типу какой-либо финальной группы, являются следствием уравнений (15). Поэтому окончательно для определения φ_k имеем систему уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_{0m} = f_{0m}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n), \quad m = 1, 2, \ldots, n_0; \\ \varphi_{rm} = u_r, \quad m = 1, 2, \ldots, n_r, \quad r = 1, 2, \ldots, s. \end{array}\right\} \tag{16}$$

Младшим из авторов настоящей заметки доказана следующая теорема относительно однозначности решения уравнений (16):

Теорема. *Система* (16) *вместе с ограничениями* $0 \leqslant \varphi_k < 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$, *однозначно определяет значения функций* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ *при любых заданных* $0 \leqslant u_r < 1$, $r = 1, 2, \ldots, s$.

Замечание 1. Доказательство теоремы будет опубликовано в другом месте. Оно опирается на свойства функций f_k, вытекающие из предположения о неразложимости системы типов и из определения финальных групп, на допущение (7) и на соотношения

$$p_k^\alpha \geqslant 0, \qquad \sum_\alpha p_k^\alpha = 1. \tag{17}$$

Последние соотношения, впрочем, используются неполностью: аналитичность функций f_k не существенна для доказательства.

Замечание 2. Все изложенное применимо и к вычислению финальных вероятностей q_k^β для ветвящихся процессов с непрерывным временем. Для этого достаточно вести счет не по времени в буквальном смысле слова, а по „поколениям“ частиц. Только для типов, не допускающих совсем дальнейших превращений, надо ввести дополнительные фиктивные превращения частиц этих типов самих в себя (с вероятностью единица). Это замечание будет пояснено на примере в конце настоящей заметки.

Замечание 3. В большинстве применений к химическим цепным реакциям каждая финальная группа состоит из одного типа (конечные продукты реакции). Изложенная теория в этом случае упрощается.

Пример. Пусть в схеме с непрерывным временем и двумя типами T_1 и T_2 заданы положительные плотности вероятностей перехода (см. ([1]), § 3)

$$\bar{p}_1^{(2,0)} = \bar{p}(T_1 \to 2\,T_1), \quad \bar{p}_1^{(0,1)} = \bar{p}(T_1 \to T_2),$$

остальные же переходы запрещены (в частности, частица T_2 ни во что не превращается). Переходя к счету по поколениям, полагаем

$$p_1^{(2,0)} = P(T_1 \to 2\,T_1) = \frac{\bar{p}_1^{(2,0)}}{\bar{p}_1^{(2,0)} + \bar{p}_1^{(0,1)}} = p,$$

$$p_1^{(0,1)} = P(T_1 \to T_2) = \frac{\bar{p}_1^{(0,1)}}{\bar{p}_1^{(2,0)} + \bar{p}_1^{(0,1)}} = 1 - p,$$

и дополнительно

$$p_2^{(0,1)} = P(T_2 \to T_2) = 1$$

(здесь p_k^α имеют уже смысл вероятностей, введенных в настоящей заметке). Финальная группа в нашем примере одна из одного состояния $\Psi_1 = \{T_2\}$. Для функций $\varphi_1(u_1), \varphi_2(u_1)$ получаем уравнения

$$\varphi_1 = p\varphi_1^2 + (1-p)\varphi_2, \ \varphi_2 = u_1.$$

Решая эти уравнения, получим формально:

$$\varphi_1 = \frac{1}{2p}\left(1 \pm \sqrt{1-4p(1-p)u_1}\right). \tag{18}$$

При ограничениях $0 \leqslant u_1 < 1$, $0 \leqslant \varphi_1 < 1$ остается только одна ветвь кривой (18) (со знаком —).

Проведем до конца расчеты для случая $p = 1/2$. Для коэффициентов разложения $\varphi_1(u_1) = q_1^{(0)} + q_1^{(1)} u_1 + q_1^{(2)} u_1^2 + \ldots$ получим в этом случае $q_1^{(0)} = 0$, $q_1^{(1)} = 1/2$, $q_1^{(2)} = 1/8, \ldots, q_1^{(m)} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-3)}{2^m m!}$, т. е. асимптотически

$$q_1^{(m)} \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} m^{-3/2}. \tag{19}$$

Отметим, что хотя $\varphi_1(1) = \sum_m q_1^{(m)} = Q_1 = 1$, т. е. процесс непременно заканчивается, математическое ожидание $M_1 = \sum_m m q_1^{(m)}$ числа получаемых из одной частицы T_1 частиц T_2 бесконечно. С этим связано своеобразное явление неустойчивости числа частиц T_2, производимых заданным, хотя бы и очень большим числом частиц T_1. Чтобы разобраться в этом, обозначим μ_n число частиц T_2, производимых n частицами T_1. Очевидно, $\mu_n = \varkappa_1 + \varkappa_2 + \ldots + \varkappa_n$, где $\varkappa_i$ обозначает число частиц T_2, производимых i-й частицей типа T_1. Величины $\varkappa_i$ взаимно независимы и подчинены распределению вероятностей $P(\varkappa_i = k) = q_i^{(k)}$.

Отсюда и из (19) вытекает (см. [3]), что величины

$$\xi_n = \mu_n / n^2 \tag{20}$$

имеют закон распределения $S_n(x) = P(\xi_n < x)$, который при $n \to \infty$ стремится к вполне определенному непрерывному предельному закону распределения

$$S(x) = \int_0^x s(x)\,dx. \tag{21}$$

Предельный закон распределения (21) может быть найден по логарифму своей характеристической функции:

$$\log \chi(t) = \log \int_0^\infty s(x) e^{itx} dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty (e^{iut} - 1) \frac{du}{|u|^{3/2}}. \tag{22}$$

Таким образом, при больших n число μ_n будет порядка n^2, но отношение μ_n / n^2 будет колебаться от случая к случаю.

Поступило
12 IV 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Колмогоров и Н. А. Дмитриев, ДАН, **56**, № 1 (1947). [2] А. Н. Колмогоров, Математ. сб., **1**, 607 (1936). [3] Б. В. Гнеденко, Уч. зап. МГУ, **30**, 61 (1939).