Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVI, № 6

АЭРОДИНАМИКА

Е. А. КРАСИЛЬЩИКОВА

ВОЗМУЩЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ ВОЗДУХА ПРИ ВИБРАЦИЯХ КРЫЛА, ДВИЖУЩЕГОСЯ СО СВЕРХЗВУКОВОЙ СКОРОСТЬЮ

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 1 XII 1946)

В настоящей работе рассматривается линеаризированная задача о вибрациях тонкого деформируемого крыла, движущегося со сверхзвуковой скоростью, в обычной постановке ([1—3]).

Задача решается в подвижных осях координат xyz, перемещающихся поступательно в направлении оси x с основной скоростью крыла, равной u.

На проекции поверхности крыла на плоскость xy нормальная составляющая скорости задана по закону

$$v_n = A_0(x, y) + \mathrm{Re}\, A_1(x, y)\, e^{i\omega t}, \qquad (1)$$

функция $A_0(x, y)$ определяет поверхность крыла, функция $A_1(x, y)$ определяет форму колебаний.

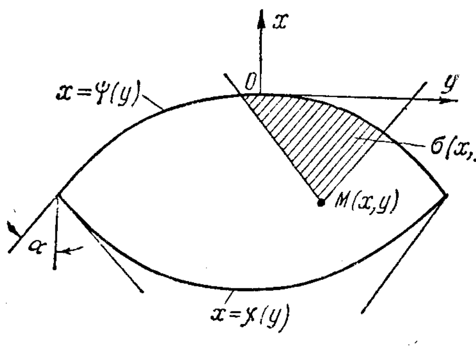

Рис. 1

Потенциал скорости φ удовлетворяет волновому уравнению. Дальше мы положим:

$$\varphi(x, y, z, t) = \varphi_0(x, y, z) + \varphi_1(x, y, z, t), \qquad (2)$$

где φ_0 соответствует установившемуся движению, φ_1 — добавочный потенциал, обусловленный колебаниями.

Мы рассматриваем две основные задачи теории крыла.

Первая задача. По заданным на крыле нормальным составляющим скорости определяется потенциал.

Решение плоской задачи получается путем применения метода Римана. Решение задачи об определении потенциала в точках оси x, соответствующих точкам крыла, дается формулой*

$$\varphi_1(x, t) = \frac{\exp(\beta x + i\omega t)}{\sqrt{u^2/a^2 - 1}} \int_0^x A_1(\xi)\, e^{-\beta\xi} J_0[\lambda(x-\xi)]\, d\xi, \qquad (3)$$

где a — скорость звука в неподвижном газе и для краткости положено $\lambda = \frac{\omega a}{u^2 - a^2}$, $\beta = \frac{i\omega u}{u^2 - a^2}$.

* Во всех выражениях следует подразумевать действительную часть.

С помощью теории рядов Фурье, как обобщение плоской задачи, находим потенциал φ_1 для точек крыла конечного размаха, передняя кромка которого задана уравнением $x=\psi(y)$, задняя — уравнением $x=\chi(y)$.

При этом всюду на контуре крыла предполагаются выполненными условия, соответственно, на передней и задней кромке:

$$\left|\frac{d\,\psi(y)}{dy}\right| \leqslant \operatorname{ctg}\alpha, \tag{4}$$

$$\left|\frac{d\,\chi(y)}{dy}\right| \leqslant \operatorname{ctg}\alpha, \tag{5}$$

где α — угол Маха.

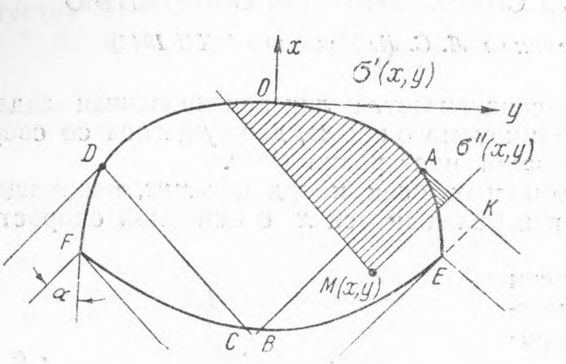

Рис. 2

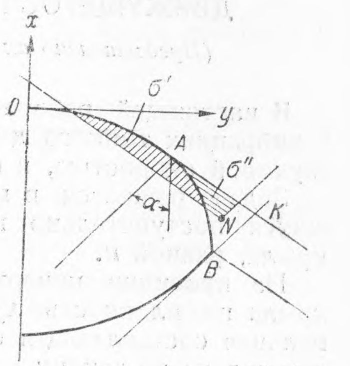

Рис. 3

Решение дается формулой

$$\varphi_1(x, y, t) =$$

$$= \frac{\exp(\beta x + i\omega t)}{\pi} \iint\limits_{\sigma(x,y)} \frac{A_1(\xi,\eta)\, e^{-\beta\xi} \cos\left(\lambda\sqrt{(x-\xi)^2-(u^2/a^2-1)(y-\eta)^2}\right)}{\sqrt{(x-\xi)^2-(u^2/a^2-1)(y-\eta)^2}}\, d\xi\, d\eta. \tag{6}$$

В области интегрирования σ (рис. 1) переменные интегрирования изменяются в пределах

$$x \leqslant \xi \leqslant \psi(y), \qquad -\xi + x + y\sqrt{u^2/a^2-1} \leqslant \eta \leqslant \xi - x + y\sqrt{u^2/a^2-1}. \tag{7}$$

Так же рассматриваем случай, когда форма крыла в плане такова, что выполняется только одно условие (5). Потенциал φ_1 вычисляется по формуле (6) в области $ABCD$ (рис. 2) — области крыла, лежащей вне конусов Маха с вершинами в точках передней кромки A (соответственно D), характерной тем, что левей нее условие (4) выполнено, правее — нарушено. В точках крыла, лежащих внутри этих конусов, потенциал φ_1 также может быть определен по выражению (6), только область интегрирования следует разбить на две части

$$\sigma(x, y) = \sigma'(x, y) + \sigma''(x, y),$$

первая из которых принадлежит крылу, где $A_1(x, y)$ задана; во второй области $\sigma''(x, y)$ эта функция является неизвестной, обозначим ее через $\theta(x, y)$.

В области AEK (линия EK параллельна образующей конуса Маха) функция $\theta(x, y)$ может быть найдена из интегрального уравнения

$$\iint\limits_{\sigma''(x,y)} \frac{\theta(\xi,\eta)\, e^{-\beta\xi} \cos\left(\lambda \sqrt{(x-\xi)^2-(u^2/a^2-1)(y-\eta)^2}\right)}{\sqrt{(x-\xi)^2-(u^2/a^2-1)(y-\eta)^2}}\, d\xi\, d\eta = D(x,y), \tag{8}$$

$$D(x,y) = -\iint\limits_{\sigma'(x,y)} \frac{A_1(\xi,\eta)\, e^{-\beta\xi} \cos\left(\lambda \sqrt{(x-\xi)^2-(u^2/a^2-1)(y-\eta)^2}\right)}{\sqrt{(x-\xi)^2-(u^2/a^2-1)(y-\eta)^2}}\, d\xi\, d\eta.$$

Области σ' и σ'' указаны на рис 3.

φ_0 находится как предельное значение φ_1 при $\omega=0$. В частности, из формул (3) и (6) получаются результаты Аккерета, Прандтля и Шлихтинга ([4], [5]).

Вторая задача. По заданному на крыле распределению давлений определяются нормальные составляющие скорости.

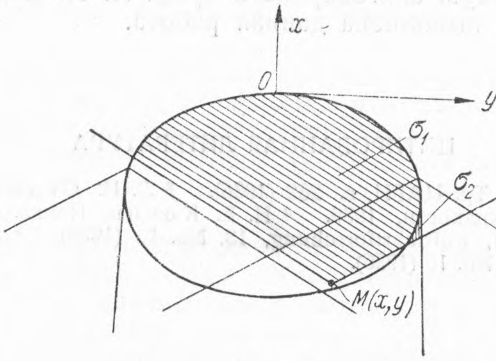

Рис. 4

Рассматривая эту задачу в плоско-параллельном потоке, как обращение первой основной задачи, решаем интегральное уравнение с ядром, зависящим от разности обоих своих аргументов, с помощью формулы Римана — Меллина. Решение дается формулой

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \sqrt{u^2/a^2-1}\ (\beta\varphi_1 - \varphi_{1x}) - \lambda \int\limits_0^x \frac{\varphi_1(x,t)\exp(\beta(x-\beta))\, J_1(\lambda(x-\xi))}{x-\xi}\, d\xi. \tag{9}$$

Задача для крыла конечного размаха решается тем же методом, как и первая основная задача о крыле в пространстве. Нормальная составляющая скорости, обусловленная вибрациями, в точках крыла $M(x,y)$ произвольной формы в плане дается в виде:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \sqrt{u^2/a^2-1}\ [\beta\varphi_1(x,y,t) - \varphi_{1x}(x,y,t)] -$$

$$- \frac{u^2/a^2-1}{\pi} \Bigg\{ \iint\limits_{\sigma_1(x,y)} \varphi_1(\xi,\eta,t) \exp(\beta(x-\xi))\, \vartheta(x,y;\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta +$$

$$+ \iint\limits_{\sigma_1(x,y)} \frac{\partial \varphi_1(\xi,\eta,t)}{\partial \eta} \exp(\beta(x-\xi))\, \vartheta_1(x,y;\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta +$$

$$+ \iint\limits_{\sigma_2(x,y)} \varphi_1(\chi(\eta),\eta,t) \exp(\beta x + k\xi + (k-\beta)\chi(\eta))\, \vartheta(x,y;\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta +$$

$$+ \iint\limits_{\sigma_2(x,y)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \varphi_1(\chi(\eta),\eta,t) \exp(\beta x + k\xi + (k-\beta)\chi(\eta)) \right\} \vartheta_1(x,y;\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta \Bigg\},$$

где положено

$$\vartheta(x, y; \xi, \eta) = \frac{\lambda \sin\left(\lambda \sqrt{(x-\xi)^2 - (u^2/a^2-1)(y-\eta)^2}\right)}{(x-\xi)^2 - (u^2/a^2-1)(y-\eta)^2} +$$

$$+ \frac{\cos\left(\lambda \sqrt{(x-\xi)^2 - (u^2/a^2-1)(y-\eta)^2}\right) - 1}{[(x-\xi)^2 - (u^2/a^2-1)(y-\eta)^2]^{3/2}},$$

$$\vartheta_1(x, y; \xi, \eta) = \frac{y-\eta}{(x-\xi)^2 \sqrt{(x-\xi)^2 - (u^2/a^2-1)(y-\eta)^2}}, \quad k = -\frac{i\omega a^2}{u(u^2-a^2)}.$$

Область интегрирования $\sigma_1(x, y)$ принадлежит крылу (рис. 4). Область интегрирования $\sigma_2(x, y)$ принадлежит вихревой пелене за крылом.

Выражаю глубокую благодарность проф. Л. И. Седову, под руководством которого выполнена данная работа.

Поступило
1 XII 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. И. Седов, Тр. ЦАГИ, в. 252 (1936). [2] Л. И. Седов, Теория плоских движений идеальной жидкости, 1939. [3] Н. Е. Кочин, Прикл. мат. и мех., **6**, в. 4 (1942). [4] L. Prandtl, Luftfahrtforschung, **13**, No. 10 (1936). [5] H. Schlichting, Luftfahrtforschung, **13**, No. 10 (1936).