Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVI, № 6

МЕХАНИКА

Д. И. ШЕРМАН

О НЕКОТОРЫХ СЛУЧАЯХ ОБЩЕЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЙ

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 23 XI 1946)

§ 1. Пусть в плоскости $z=x+iy$ задана конечная односвязная область S, ограниченная замкнутой кривой L, координаты точек которой достаточное число раз дифференцируемы по дуге s. Будем считать обход кривой совершающимся против движения часовой стрелки и нормаль к ней направим изнутри S во вне. За начало координат выберем точку, лежащую в S.

Предположим, что требуется определить функцию $u(x, y; \lambda)$, непрерывную в замкнутой области S, вместе со своими частными производными по переменным x и y до m-го порядка (включительно) почти для всех значений параметра λ, удовлетворяющую в S дифференциальному уравнению

$$\Delta u - \lambda^2 u = 0 \tag{1}$$

и на L предельному равенству

$$\sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{k} a_{kj}(s) \frac{\partial^k u}{\partial x^{k-j} \partial y^j} = f(s), \tag{2}$$

где Δ — оператор Лапласа, λ — вещественный параметр и $a_{kj}(s)$, $f(s)$ — известные функции; будем считать, что $a_{mj}(s)$ удовлетворяют условию Липшица и неравенству

$$|g(s)| = |g_1(s) + ig_2(s)| = \left| \sum_{j=0}^{m} (i)^j a_{mj} \right| > 0, \tag{3}$$

где g_1 и g_2 — вещественные величины. Относительно же остальных коэффициентов $a_{kj}(s)$ и свободного члена $f(s)$ ограничимся предположением, что они непрерывны на L.

Считая, для удобства, $|g(s)|=1$, положим $g_1 = \cos\omega(s)$ и $g_2 = \sin\omega(s)$. Возможны два случая: при обходе L в положительном направлении функция $\omega(s)$ получает приращение, равное либо $-2\pi n$, либо $2\pi n$, где n — целое положительное число или нуль. В настоящей статье мы рассмотрим первый случай (включая в него $n=0$).

Обозначим через $\chi^*(z)$ функцию, регулярную вне S и обращающуюся в постоянную на бесконечности, вещественная часть которой равна $\omega(s)+n\theta$ на L, где θ — полярный угол. При этом, полагая $\operatorname{Im}\chi^*(\infty)=0$, допустим для определенности, что $\sin \operatorname{Re}\chi^*(\infty) \neq 0$, где Re и Im, соответственно, символы вещественной и мнимой части.

§ 2. Покажем, что любая функция $u(x, y; \lambda)$, удовлетворяющая уравнению (1) и обладающая указанными свойствами, почти для всех λ представима в виде:

$$u(x, y; \lambda)=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{\pi i}\int_L \nu(s, \lambda)\frac{Q}{g}\,dt+\sum_{k=0}^{m+n} c_k(\lambda)\,e^{ik\theta}\,I_k(\lambda\rho)\right], \tag{4}$$

где введены обозначения:

$$\begin{gathered} Q=\left(\frac{2}{\lambda^2}\right)^{m-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)^{m-1}\left\{R_0(\lambda r)-\ln\frac{t-z}{t}\,I_0(\lambda r)\right\}, \\ R_0(\lambda r)=K_0(\lambda r)+\left(C+\ln\frac{\lambda r}{2}\right)I_0(\lambda r), \end{gathered} \tag{5}$$

причем плотность $\nu(s, \lambda)$ вещественна, $t=\xi+i\eta$ — аффикс точки L и под $\ln\frac{t-z}{z}$ понимается ветвь, обращающаяся в нуль при $z=0$; далее, I_k и K_0 — функции Бесселя первого и второго рода от мнимого аргумента, C — постоянная Эйлера, $c_k(\lambda)$ — некоторые функции от λ, из них $c_0(\lambda)$ и $c_{m+n}(\lambda)$ — вещественные *, и, наконец, $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$ и $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$.

Легко убедиться, что

$$Q=\frac{(-1)^m}{(m-1)!}(t-z)^{m-1}\ln\frac{t-z}{z}+\ldots, \tag{6}$$

где через многоточие обозначены слагаемые, остающиеся абсолютно интегрируемыми или непрерывными вместе со своими частными производными m-го порядка по координатам x и y, когда z стремится к точке, лежащей на L.

Рассмотрим вспомогательную задачу, заключающуюся в отыскании решения $u^*(x, y; \lambda)$ уравнения (1) при условии на L:

$$\sum_{j=0}^{m} a_{mj}\frac{\partial^m u^*}{\partial x^{m-j}\,\partial y^j}=f(s). \tag{7}$$

Будем искать $u^*(x, y; \lambda)$ в виде выражения

$$u^*=\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\pi i}\int_L \nu^*(s, \lambda)\frac{Q}{g}\,dt-\sum_{k=m}^{m+n}\left(\frac{2}{\lambda}\right)^k a_{k-m}(\lambda)\,e^{ik\theta}I_k(\lambda\rho)\right\}, \tag{8}$$

положив в нем **

$$\begin{gathered} a_k(\lambda)=\frac{k!}{\pi i}\int_L\frac{\nu^*(s, \lambda)}{(a+ib)}\frac{dt}{t^{k+1}} \quad (k=0;\ 1, \ldots, n-1), \\ a_n(\lambda)=\mathrm{Re}\,\frac{n!}{\pi i}\int_L\frac{\nu^*(s, \lambda)\,dt}{(a+ib)\,t^{n+1}}, \end{gathered} \tag{9}$$

причем $\nu^*(s, \lambda)$ — подлежащая определению новая вещественная неизвестная.

---

* Коэффициент $c_{m+n}(\lambda)$ следует считать мнимым, если $\sin\mathrm{Re}\,\chi^*(\infty)=0$.

** Если $\sin\mathrm{Re}\,\chi^*(\infty)=0$, то в формуле для $a_n(\lambda)$ следует вместо вещественной части функционала взять умноженную на i его мнимую часть.

Взяв в (8) параметр $\lambda=0$ и введя обозначения $\nu_0(s)=\nu^*(s, 0)$, $a_{k0}=a_k(0)$, получим при ограниченной $\nu_0(s)$ гармоническую в области S функцию

$$u_0(x, y)=\mathrm{Re}\left\{\frac{(-1)^m}{(m-1)!\,\pi i}\int\limits_L \frac{\nu_0(s)}{(a+ib)}(t-z)^{m-1}\ln\frac{t-z}{t}\,dt-\sum_{k=m}^{m+n}\frac{a_{k-m,0}}{k!}z^k\right\}. \tag{10}$$

В силу (9) легко убеждаемся, что регулярная в S функция $\varphi_0(z)=u_0(x, y)+iv_0(x, y)$ (где v_0 — сопряженная с u_0) удовлетворяет условиям

$$\varphi_0^{(k)}(0)=0, \quad \mathrm{Re}\,\varphi_0^{(m+n)}(0)=0 \quad (k=m, \ldots, m+n-1). \tag{11}$$

Отметим, что выбор самого функционала a_n в (9) сделан также в предположении, что $\sin\mathrm{Re}\,\chi(0)\neq 0$, где $\chi(z)$ — регулярная в S функция, вещественная часть которой на L равна $\omega(s)+n\theta$.

Примечание. Если $\sin\mathrm{Re}\,\chi(0)=0$ (при условии $\sin\mathrm{Re}\,\chi^*(\infty)\neq 0$), то, взяв в S точку z_0, в которой $\mathrm{Im}\,(z^n e^{-i\chi(z)})^{(n)}\neq 0$, заменим в знаменателе подинтегральной функции для a_n в равенстве (9) множитель t^{n+1} на $(t-z_0)^{n+1}$*, оставляя все предыдущие функционалы без изменения.

§ 3. Подставив теперь выражение (8) для $u^*(x, y; \lambda)$ в граничное равенство (7), получим, в чем нетрудно убедиться, имея в виду разложение (6), для определения $\nu^*(s, \lambda)$ интегральное уравнение Фредгольма, ядро которого является целой функцией параметра λ. Рассмотрим соответствующее однородное уравнение (при $f(s)=0$), положив в нем $\lambda=0$ и заменив $\nu^*(s, \lambda)$ на $\nu_0(s)$. Очевидно, оно может быть получено из (однородного же) условия (7) с помощью представления (10).

Преобразовав это условие к виду

$$\mathrm{Re}\left\{e^{i\chi(t)}\,t^{-n}\varphi_0^{(m)}(t)\right\}=0,$$

заключаем на основании (11), что функция $\varphi_0(z)$ может быть лишь полиномом $(m-1)$-й степени. Рассуждая далее, как в статье [1], найдем, что $\nu_0(s)=0$.

Таким образом, $\lambda=0$ является обыкновенной точкой резольвенты интегрального уравнения, к которому мы свели вспомогательную задачу.

Отсюда вытекает [2], что оно разрешимо почти для всех значений параметра λ.

С другой стороны, выразив $u^*(x, y; \lambda)$ через гармоническую функцию $p(x, y; \lambda)$ из уравнения

$$p=u^*+\lambda^2\int\limits_S u^* G\,dS, \tag{12}$$

где G — функция Грина для области S, получим из (7) для $p(x, y; \lambda)$ задачу Римана, разрешимую, в силу только что сказанного, почти для всех λ. Поэтому (см. [1], [3], [4]) однородная задача при условии (7) для u^* (также почти для всех λ) имеет $2(m+n)$ и только $2(m+n)$ нетривиальных решений. Обозначим их через $u_{kj}(x, y; \lambda)$ ($k=0, 1, \ldots, m+n$; $j=1, 2$), причем условимся, что при $k=0$

* Точка z_0 всегда может быть выбрана таким образом. Действительно, допуская противное, найдем, что $\omega(s)+n\theta=0$ на L; но тогда $\chi^*(z)=0$, что, по условию, невозможно. Вместо последней из формул (11) будем при этом иметь $\mathrm{Re}\,\varphi_0^{(m+n)}(z_0)=0$.

или $m+n$ индекс j может принимать лишь значение, равное 1. Эти решения мы найдем следующим образом. Положим

$$u_{kj}(x, y; \lambda)=u^*_{kj}(x, y; \lambda)+\mathrm{Re}\,\varepsilon_j (2/\lambda)^k b_k e^{jk\theta} I_k(\lambda\rho), \qquad (13)$$
$$k=0, 1, \ldots, m+n; \quad j=1, 2,$$

где под u^*_{kj} будем понимать выражение (8) с плотностью ν^*_{kj}; b_k — некоторые произвольно фиксированные, отличные от нуля (и не зависящие от λ) вещественные постоянные, $\varepsilon_1=1$, $\varepsilon_2=i$. Затем определим ν^*_{kj} из интегрального уравнения, которое получим после подстановки в однородное условие (7) вместо u^* выражения (13) для u_{kj}. Ни одна из функций u_{kj}, найденных таким образом (и, очевидно, мероморфных от λ), не равна тождественно нулю. В самом деле, допустив противное относительно какой-либо из u_{kj} и положив в ней * $\lambda=0$, $\nu^{(0)}_{kj}(s)=\nu_{kj}(s, 0)$, получим

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{(-1)^m}{(m-1)!\,\pi i}\int\limits_L \nu^{(0)}_{kj}(s)\frac{(t-z)^{m-1}}{(a+ib)} 1 \,\frac{t-z}{t}\,dt-\sum_{l=m}^{m+n}\frac{a_{l-m,\,0}}{l!}z^l+\varepsilon_j b_k z^k\right\}=0,$$

где $a_{l-m,0}$ — функционалы (9) с плотностью $\nu^{(0)}_{kj}(s)$. Но отсюда следует, что ([1]) $\nu^{(0)}_{kj}=0$, $b_k=0$, а это невозможно, так как, по условию, $b_k\neq 0$. Так же легко установить, что все u_{kj} линейно независимы между собою.

Подставим теперь в равенство (7) вместо $f(s)$ предельное значение выражения

$$\sum_{j=0}^{m} a_{mj}\frac{\partial^m u}{\partial x^{m-j}\,\partial y^j},$$

где $u(x, y; \lambda)$ — заданная функция, удовлетворяющая условиям, указанным в начале § 2. Тогда, взяв $u^*(x, y; \lambda)$ попрежнему в форме (8) и определив $\nu^*(s, \lambda)$ из интегрального уравнения, которое мы при этом получим, будем иметь, в силу сказанного:

$$u(x, y; \lambda)=u^*(x, y; \lambda)+\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=0}^{m+n} c_{kj}(\lambda)\, u_{kj}(x, y; \lambda), \qquad (14)$$

где $c_{kj}(\lambda)$ — некоторые функции от λ. Отсюда, введя обозначение

$$\nu(s, \lambda)=\nu^*(s, \lambda)+\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=0}^{m+n} c_{kj}(\lambda)\,\nu_{kj}(s, \lambda) \qquad (15)$$

и собрав слагаемые, содержащие a_k, c_{kj} и b_k, придем к требуемому представлению (4).

Наконец, возвращаясь к исходной задаче, сформулированной в начале статьи, и подставив выражение (4) для искомой функции $u(x, y; \lambda)$ в граничное условие (2), мы непосредственно сведем задачу к эквивалентному ей, на основании вышеизложенного, интегральному уравнению Фредгольма.

Институт механики
Академии Наук СССР

Поступило
23 XI 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. И. Шерман, Изв. АН СССР, сер. математ., **10** (1946). [2] J. Tamarkin, Ann. Mathemat., **28**, No. 2 (1927). [3] Ф. Д. Гахов, Изв. Казанск. физ.-матем. об-ва, **10**, сер. 3 (1938). [4] И. Н. Векуа, Тр. Тбилисск. математ. ин-та, **11** (1932).

* На основании сказанного выше $\lambda=0$ является обыкновенной точкой для $\nu^*_{kj}(s, \lambda)$.