Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVI, № 6

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР А. Я. ХИНЧИН

ОБ ОДНОМ ПРЕДЕЛЬНОМ СЛУЧАЕ АПРОКСИМАЦИОННОЙ ТЕОРЕМЫ КРОНЕКЕРА

Наиболее распространенная форма апроксимационной теоремы Кронекера гласит:

Для того, чтобы система неравенств

$$|\theta_i x - y_i - \alpha_i| < \varepsilon \quad (1 \leqslant i \leqslant n), \tag{1}$$

где θ_i и α_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — данные вещественные числа, при любом $\varepsilon > 0$ удовлетворялась целыми числами x, y_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, необходимо и достаточно выполнение следующего условия: если целые числа a_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, b таковы, что $L_a(\theta) = \sum_{i=1}^{n} a_i \theta_i + b = 0$, то существует такое целое число c, что $L_a(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i + c = 0$.

В случае, когда числа θ_i линейно независимы (т. е. когда $L_a(\theta) = 0$ возможно лишь при $a_i = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, $b = 0$), теорема Кронекера утверждает, что дробные части величин $\theta_1 x, \theta_2 x, \ldots, \theta_n x$, где x пробегает все целые числа, расположены всюду плотно в единичном кубе пространства n измерений. Этот частный случай теоремы Кронекера наиболее известен, и для него было дано много различных доказательств.

В настоящей заметке я имею в виду рассмотреть тот предельный случай теоремы Кронекера, когда система неравенств (1) заменяется системой уравнений

$$\theta_i x - y_i - \alpha_i = 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant n), \tag{2}$$

для которой ищутся точные решения в целых x, y_i. В духе теоремы Кронекера мы поставим вопрос о том, какая связь между величинами $L_a(\theta)$ и $L_a(\alpha)$ может служить критерием существования целочисленных решений системы (2). Этот вопрос, на первый взгляд не заставляющий, пожалуй, ожидать интересных результатов, неожиданным образом находит себе простое и изящное решение, полностью отвечающее стилю теории Кронекера. Имеет место следующая

Теорема. *Для того чтобы система уравнений (2) имела решение в целых x, y_i, необходимо и достаточно существование такой положительной постоянной Γ, чтобы при любых целых a_i, b и надлежаще выбранном c имело место неравенство*

$$|L_a(\alpha)| < \Gamma |L_a(\theta)|. \tag{3}$$

Предварительные замечания. 1. Очевидно, условие (3) представляет собою усиление условия теоремы Кронекера, в полном соответствии с тем, что система (2) является усилением системы (1).

2. Интересно отметить, что в теореме Кронекера условие формулируется с помощью точных равенств, а вытекающий из него факт — посредством неравенств, в то время как в нашей теореме дело обстоит как раз наоборот.

Доказательство. Необходимость существования постоянной Γ тривиальна, так как из (2) при надлежащем выборе целого числа c следует

$$L_a(\alpha)=xL_a(\theta).$$

Для доказательства достаточности рассмотрим сначала случай $n=1$, и будем писать для краткости θ и α вместо θ_1 и α_1. Обозначим через θ_q (соотв. α_q) расстояние числа θ (соотв. α) от ближайшей к нему рациональной дроби со знаменателем q. Из допущения (3) в нашем случае, очевидно, следует, что при любом $q>0$

$$\alpha_q\leqslant\Gamma\theta_q.$$

Пусть p_n/q_n—n-ая подходящая дробь числа θ,* и пусть $\alpha_{q_n}=|\alpha-r_n/q_n|$. Положим

$$r_n q_{n+1}-q_n r_{n+1}=x_n,$$
$$r_n p_{n+1}-p_n r_{n+1}=y_n;$$

тогда

$$|x_n|=q_n q_{n+1}\left|\frac{r_n}{q_n}-\frac{r_{n+1}}{q_{n+1}}\right|\leqslant q_n q_{n+1}(\alpha_{q_n}+\alpha_{q_{n+1}})\leqslant$$
$$\leqslant\Gamma q_n q_{n+1}(\theta_{q_n}+\theta_{q_{n+1}})=\Gamma$$

$\left(\text{так как } \theta_{q_n}+\theta_{q_{n+1}}=\left|\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right|=\frac{1}{q_n q_{n+1}}\right)$. С другой стороны,

$$|x_n\theta-y_n-\alpha|=\left|x_n\left(\theta-\frac{p_n}{q_n}\right)-\left(\alpha-\frac{r_n}{q_n}\right)+\frac{p_n x_n-q_n y_n-r_n}{q_n}\right|=$$
$$=\left|x_n\left(\theta-\frac{p_n}{q_n}\right)-\left(\alpha-\frac{r_n}{q_n}\right)\right|\leqslant\Gamma\theta_{q_n}+\alpha_{q_n}\leqslant 2\Gamma\theta_{q_n}.$$

В силу $|x_n|\leqslant\Gamma$ существует такое целое число a, что $x_n=a$ для бесчисленного множества значений n; для $x_n=a$ и достаточно большого n, очевидно, и y_n должно принимать одно и то же значение b, так что

$$|a\theta-b-\alpha|\leqslant 2\Gamma\theta_{q_n},$$

откуда, так как $\theta_{q_n}\to 0$ при $n\to\infty$,

$$a\theta-b-\alpha=0,$$

что и требовалось доказать.

Пусть теперь $n>1$. Из условия (3), в частности, следует, что при любых целых q, p найдется целое число r, для которого

$$|q\alpha_1-r|<\Gamma|q\theta_1-p|.$$

---

* Мы предполагаем θ иррациональным, так как в противном случае доказательство становится тривиальным.

В силу того, что для $n=1$ теорема уже доказана, отсюда вытекает, что $\alpha_1=x\theta_1-y_1$, где x и y_1 — целые числа. Пусть теперь $2\leqslant i\leqslant n$; мы можем допустить, что число θ_1 иррационально (в случае, когда все θ_i рациональны, доказательство тривиально); поэтому целые числа k_i, l_i могут быть выбраны так, чтобы

$$k_i\theta_1=l_i+\theta_i+\gamma_i,$$

где $|\gamma_i|$ сколь угодно мало. Но в силу (3) при надлежаще выбранном целом m_i

$$|\delta_i|=|k_i\alpha_1-m_i-\alpha_i|\leqslant\Gamma|k_i\theta_1-l_i-\theta_i|=\Gamma|\gamma_i|.$$

Заметим теперь, что

$$\begin{aligned}\alpha_i&=k_i\alpha_1-m_i-\delta_i=k_i(x\theta_1-y_1)-m_i-\delta_i=\\&=x(l_i+\theta_i+\gamma_i)-k_iy_1-m_i-\delta_i=\\&=x\theta_i+(xl_i-y_1k_i-m_i)+x\gamma_i-\delta_i.\end{aligned}$$

Так как здесь $xl_i-y_1k_i-m_i$ — целое число, а $|x\gamma_i-\delta_i|$ сколь угодно мало, то $\alpha_i-x\theta_i$ сколь угодно мало отличается от целого числа; будучи постоянным, $\alpha_i-x\theta_i$ должно поэтому равняться целому числу $-y_i$, т. е.

$$\alpha_i=x\theta_i-y_i\quad(1\leqslant i\leqslant n),$$

что и требовалось доказать.

Поступило
27 II 1947