Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVI, № 6

МАТЕМАТИКА

М. А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ

О ДЕФЕКТНЫХ ЧИСЛАХ ЗАМКНУТЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 5 XII 1946)

В теории расширения эрмитовых операторов существенную роль играет понятие дефектных чисел операторов. Как известно, дефектные числа эрмитова оператора одинаковы для всех точек каждой из полуплоскостей комплексного переменного.

В настоящей статье мы устанавливаем аналогичное утверждение для произвольного замкнутого оператора при помощи метода, выясняющего простую геометрическую сущность этого факта*.

§ 1. Пусть G — связная область плоскости комплексного переменного λ и $\{U_\lambda\}$ $(\lambda \in G)$ — семейство непрерывных линейных операторов, определенных на замкнутом подпространстве $\mathfrak{L}$ гильбертова пространства $\mathfrak{H}$ $(U_\lambda \mathfrak{L} \subset \mathfrak{H},\ \lambda \in G)$ и удовлетворяющих следующим условиям:

a) область $\mathfrak{L}_\lambda$ $(\lambda \in G)$ значений операторов U_λ $(\mathfrak{L}_\lambda = U_\lambda \mathfrak{L})$ является замкнутым подпространством;

b) из $U_\lambda f = 0$ $(\lambda \in G)$ следует $f = 0$;

c) для каждого $\lambda \in G$ $\lim\limits_{\mu \to \lambda} \| U_\lambda - U_\mu \| = 0$.

Ортогональные дополнения в $\mathfrak{H}$ к $\mathfrak{L}_\lambda$ обозначим через $\mathfrak{N}_\lambda$.

Теорема 1. *Для всех $\lambda \in G$ подпространства $\mathfrak{N}_\lambda$ имеют одинаковую размерность.*

Зафиксируем некоторое $\lambda_0 \in G$. В силу a) и b) непрерывный оператор U_{λ_0} взаимно однозначно преобразует замкнутое подпространство $\mathfrak{L}$ в замкнутое подпространство $\mathfrak{L}_{\lambda_0}$; следовательно, определенный на $\mathfrak{L}_{\lambda_0}$ оператор $U_{\lambda_0}^{-1}$ будет непрерывным; норму этого оператора обозначим через k.

Выберем в G такую окрестность W точки λ_0, чтобы для любых λ и μ из W

$$\| U_\lambda - U_\mu \| < \frac{1}{3k}. \tag{1}$$

Тогда

$$\| U_\lambda^{-1} \| < \frac{3}{2} k. \tag{2}$$

В самом деле:

$$\| U_\lambda f \| \geqslant \| U_{\lambda_0} f \| - \| (U_\lambda - U_{\lambda_0}) f \| > \frac{1}{k} \| f \| - \frac{1}{3k} \| f \| = \frac{2}{3k} \| f \|.$$

---

* Возможность такой постановки вопроса возникла на семинаре проф. М. Г. Крейна при Институте математики АН УССР. Окончательная формулировка теорем 1 и 2 принадлежит проф. М. Г. Крейну.

1°. Для любых $\lambda, \mu \in W$ подпространства $\mathfrak{N}_\lambda$ и $\mathfrak{L}_\mu$ не имеют общих элементов, кроме нуля θ.

Пусть $f_0 \in \mathfrak{L}_\mu$, $\|f_0\| \neq 0$. Тогда $f_0 = U_\mu \varphi_0$ $(\varphi_0 \in \mathfrak{L})$. Применяя неравенства (1) и (2), получим $\|f_0 - U_\lambda \varphi_0\| = \|(U_\mu - U_\lambda)\varphi_0\| < \frac{1}{2}\|f_0\|$, откуда следует, что $f_0 \overline{\in} \mathfrak{N}_\lambda$ (если $f_0 \in \mathfrak{N}_\lambda$, то $\|f_0 - U_\lambda \varphi_0\| > \|f_0\|$).

2°. Прямая сумма $\mathfrak{N}_\lambda + \mathfrak{L}_\mu$ $(\lambda, \mu \in W)$ плотна в $\mathfrak{H}$, так как элемент f_0, ортогональный $\mathfrak{N}_\lambda$ и $\mathfrak{L}_\mu$, принадлежит $\mathfrak{L}_\lambda$ и $\mathfrak{N}_\mu$, а, по 1°, таким элементом может быть только нуль θ.

3°. Если $h = f + g$ $(f \in \mathfrak{N}_\lambda, g \in \mathfrak{L}_\mu; \lambda, \mu \in W)$, то

$$\|f\| < \frac{1+\sqrt{5}}{2}\|h\|, \quad \|g\| < \frac{1+\sqrt{5}}{2}\|h\|. \tag{3}$$

Пусть $g = U_\mu \varphi$ $(\varphi \in \mathfrak{L})$. Так как $(f, U_\lambda \varphi) = 0$, то $(f, g) = (f, (U_\mu - U_\lambda)\varphi)$. Оценивая последнее выражение при помощи неравенств Шварца (1) и (2), получим $|(f, g)| < \frac{1}{2}\|f\|\,\|g\|$. Отсюда $\|h^2\| > (\|f\| - \|g\|)^2 + \|f\|\,\|g\|$. Замечая теперь, что каждое из положительных слагаемых в правой части меньше $\|h\|^2$, после несложных преобразований получим (3).

4°. Прямая сумма $\mathfrak{N}_\lambda + \mathfrak{L}_\mu$ замкнута и, следовательно, совпадает с $\mathfrak{H}$:

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_\lambda + \mathfrak{L}_\mu.$$

Пусть $h_n \in \mathfrak{N}_\lambda + \mathfrak{L}_\mu$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $h_n \to h$; h_n $(n = 1, 2, \ldots)$ представимо в виде $h_n = f_n + g_n$, где $f_n \in \mathfrak{N}_\lambda$, $g_n \in \mathfrak{L}_\mu$ и последовательности f_n и g_n, в силу (3), будут последовательностями Коши. Подпространства $\mathfrak{N}_\lambda$ и $\mathfrak{L}_\mu$ замкнуты, следовательно $f_n \to f$, $f \in \mathfrak{N}_\lambda$ и $g_n \to g$, $g \in \mathfrak{L}_\mu$. Очевидно: $h = f + g \in \mathfrak{N}_\lambda + \mathfrak{L}_\mu$.

5°. Размерности $\mathfrak{N}_\lambda$ и $\mathfrak{N}_\mu$ $(\lambda, \mu \in W)$ равны, так как проекционный оператор P_μ подпространства $\mathfrak{N}_\mu$ устанавливает взаимно однозначное (в силу (3)) и взаимно непрерывное соответствие между элементами $\mathfrak{N}_\lambda$ и $\mathfrak{N}_\mu$.

Поскольку G — связная область, из 5° следует теорема 1.

§ 2. Установим теперь понятие дефектных чисел для класса замкнутых операторов. Рассмотрим линейный оператор A с областью определения $\mathfrak{D}(A)$.

Напомним, что оператор A называется замкнутым, если из того, что $f_n \to f$ $(f_n \in \mathfrak{D}(A))$ и $Af_n \to g$, следует, что $f \in \mathfrak{D}(A)$ и $g = Af$. Точка комплексной плоскости λ называется регулярной для оператора A, если существует число $k > 0$ такое, что

$$\|(A - \lambda E) f\| \geqslant \frac{1}{k_\lambda}\|f\| \quad (f \in \mathfrak{D}(A)).$$

Легко показать, что если λ — регулярная точка и A — замкнутый оператор, то $\mathfrak{L}_\lambda = (A - \lambda E)\mathfrak{D}(A)$ — замкнутое подпространство. Множество регулярных для оператора A точек открыто.

Из теоремы 1 следует

Теорема 2. *Пусть A — замкнутый оператор и G — область комплексной плоскости, состоящая из регулярных для A точек. Размерности ортогональных к $\mathfrak{L}_\lambda$ в $\mathfrak{H}$ дополнений $\mathfrak{N}_\lambda$ одинаковы для всех $\lambda \in G$.*

Действительно, зафиксировав $\lambda_0 \in G$, увидим, что семейство $\{U_\lambda\}$ операторов $U_\lambda = (A - \lambda E)(A - \lambda_0 E)^{-1}$ $(\lambda \in G)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1: операторы U_λ непрерывны $\left(\|U_\lambda\| \leqslant 1 + \frac{|\lambda - \lambda_0|}{k_{\lambda_0}}\right)$

и преобразуют взаимно однозначно замкнутое подпространство $\mathfrak{L}_{\lambda_0}$ в замкнутое подпространство $\mathfrak{L}_\lambda$ (свойства a) и b)).

Свойство c) следует из того, что для $\lambda, \mu \in G$

$$\| U_\lambda - U_\mu \| = |\lambda - \mu| \, \| (A - \lambda_0 E)^{-1} \| = |\lambda - \mu| \, k_{\lambda_0}.$$

Размерность подпространств $\mathfrak{N}_\lambda$ для $\lambda \in G$ будем называть дефектным числом оператора A в G.

Как известно, для эрмитова оператора A верхняя и нижняя полуплоскости комплексной плоскости λ состоят из регулярных для A точек, и поэтому эрмитов оператор может иметь не более двух различных дефектных чисел. В частности, когда одна из точек действительной оси регулярна (оператор имеет „люк"), то его дефектные числа равны, откуда следует, что в этом случае оператор допускает самосопряженное расширение (ср. ([1, 2])).

Поступило
5 XII 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. W. Calkin, Duke Math. J., 7, 504 (1940). [2] М. Г. Крейн, ДАН, 48, № 5, 303 (1945).