

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

М. З. НАРОДЕЦКИЙ

К ЗАДАЧЕ ГЕРЦА О СОПРИКАСАНИИ ДВУХ ЦИЛИНДРОВ

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 23 XI 1946)

Задача о соприкосновении двух упругих тел в трехмерном случае была впервые решена Герцем⁽¹⁾. Дальнейшее развитие эта задача получила в работе Н. М. Беляева⁽²⁾. В решении Герца напряжения и деформации вблизи поверхности соприкосновения рассматриваются независимо от общего напряженного состояния соприкасающихся тел. Это возможно лишь в том случае, когда размеры соприкасающихся тел бесконечно велики по сравнению с поверхностью соприкосновения и когда внешняя сила приложена далеко от этой поверхности.

Ниже мы приводим более общее решение плоской задачи о внутреннем соприкосновении двух цилиндров, конечного и бесконечного, которое дает возможность установить влияние места приложения внешней силы на напряжения и деформации контактных поверхностей. Отметим, что аналогичным образом могут быть найдены решения для других случаев плоского касания.

Пусть $z = x + iy$ — некоторая плоскость, перпендикулярная к образующей цилиндров. Обозначим через ε аффикс точки приложения силы P , отнесенной к единице длины образующей и прижимающей один цилиндр к другому. Силу P условимся считать направленной по оси y . Далее, обозначим через S_j ($j=1, 2$) (бесконечную и конечную) области, расположенные в плоскости $z = x + iy$ и ограниченные, соответственно, окружностями L_j радиусов R_j ($j=1, 2$). Очевидно, области S_j являются поперечными сечениями указанных цилиндров. Общую для обоих сечений дугу контакта назовем γ . Наконец, дуги $L_j - \gamma$, свободные от внешних напряжений, обозначим через L_j^* ($j=1, 2$).

Как известно⁽³⁾, вектора напряжения в любой площадке соприкасающихся тел связаны с некоторыми функциями $\varphi_1(z)$, $\psi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$, $\psi_2(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$, аналитическими, соответственно, в S_1 и S_2 , соотношениями:

$$\varphi_1'(z) + \overline{\varphi_1'(z)} - z\overline{\varphi_1''(z)} - e^{-2i\vartheta}\overline{\psi_1'(z)} = N_1 + iT_1 \text{ в } S_1, \quad (1)$$

$$\varphi_2'(z) + \overline{\varphi_2'(z)} - z\overline{\varphi_2''(z)} - e^{-2i\vartheta}\overline{\psi_2'(z)} = N_2 + iT_2 \text{ в } S_2, \quad (2)$$

где N и T — нормальные и касательные компоненты векторов напряжений; ϑ — угол, образуемый радиусом-вектором произвольной точки с положительным направлением оси x . Предположим, следуя Герцу, что касательные составляющие на γ равны нулю (поверхности цилиндров абсолютно гладкие). Тогда будем иметь на γ :

$$\varphi_1'(t) + \overline{\varphi_1'(t)} - t\overline{\varphi_1''(t)} - e^{-2i\vartheta}\overline{\psi_1'(t)} = N(t), \quad (3)$$

$$\varphi_2'(t) + \overline{\varphi_2'(t)} - t\overline{\varphi_2''(t)} - e^{-2i\vartheta}\overline{\psi_2'(t)} = N(t), \quad (4)$$

где t — аффикс точек γ .

Смещения произвольной точки соприкасающихся тел определяются из равенства (3):

$$2\mu(u_1 + iv_1) = \kappa\varphi_1(z) - z\overline{\varphi_1'(z)} - \overline{\psi_1(z)} \text{ в } S_1, \quad (5)$$

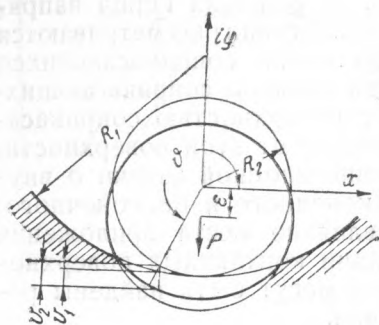
$$2\mu(u_2 + iv_2) = \kappa\varphi_2(z) - z\overline{\varphi_2'(z)} - \overline{\psi_2(z)} \text{ в } S_2, \quad (6)$$

где u и v — горизонтальные и вертикальные компоненты векторов смещения, κ и μ — упругие постоянные, которые мы считаем одинаковыми для обеих сред.

Разность вертикальных смещений точек, лежащих на γ , как нетрудно убедиться, определяется из равенства:

$$g(t) = v_2 - v_1 = \frac{1-c}{8R_2} (t + \bar{t})^2, \quad (7)$$

где $c = R_2/R_1 < 1$.



Устремляя в равенствах (5) и (6) точку z к точке t дуги γ и используя условие непрерывности напряжений при переходе из одной области в другую, после некоторых преобразований найдем

$$\varphi(t) - \overline{\varphi(t)} = \frac{4\mu i}{1+\kappa} g(t), \quad (8)$$

где введено обозначение:

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t) \text{ на } \gamma. \quad (9)$$

Дифференцируя равенство (8) по t и подставляя значение $g'(t)$ из (7), получим

$$t\varphi'(t) + \overline{t\varphi'(t)} = \frac{\mu i(1-c)}{R_2(1+\kappa)} (t^2 - \bar{t}^2) \text{ на } \gamma. \quad (10)$$

Равенства (3), (4) и (8) представляют собой граничные условия Герца для рассматриваемой плоской задачи.

Записав (3) и (4) в форме:

$$\varphi_{01}'(t) + \overline{\varphi_{01}'(t)} - t\overline{\varphi_{01}''(t)} - e^{-2i\theta}\overline{\psi_{01}'(t)} = \begin{cases} N(t) + \frac{Pi}{2\pi} \left(\frac{2}{1+\kappa} \frac{1}{t} - \frac{1}{t} \right) \text{ на } \gamma, \\ \frac{Pi}{2\pi} \left(\frac{2}{1+\kappa} \frac{1}{t} - \frac{1}{t} \right) \text{ на } L_1^*; \end{cases} \quad (11)$$

$$\varphi_{02}'(t) + \overline{\varphi_{02}'(t)} - t\overline{\varphi_{02}''(t)} - e^{-2i\theta}\overline{\psi_{02}'(t)} = \begin{cases} N(t) + A \left(1 + \frac{t}{t-\varepsilon} \right) \frac{1}{t-\varepsilon} - \\ - \kappa A \left(1 - \frac{\varepsilon}{t-\varepsilon} \right) \frac{1}{t} - \\ - A \frac{1}{t-\varepsilon} \text{ на } \gamma, \\ A \left(1 + \frac{\bar{t}}{i-\varepsilon} \right) \frac{1}{t-\varepsilon} - \\ - \kappa A \left(1 - \frac{\varepsilon}{i-\varepsilon} \right) \frac{1}{t} - \\ - A \frac{1}{t-\varepsilon} \text{ на } L_2^*, \end{cases} \quad (12)$$

где $\varphi_{01}(z)$, $\psi_{01}(z)$ и $\varphi_{02}(z)$, $\psi_{02}(z)$ — функции, регулярные, соответственно, в S_1 и S_2 и

$$A = \frac{Pi}{2\pi(1+x)}, \quad (13)$$

найдем отсюда:

$$\varphi'_{01}(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{N(t)}{t-z} dt - \frac{Pi}{2\pi} \frac{1}{z}, \quad (14)$$

$$\varphi'_{02}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{N(t)}{t-z} dt + A \left(1 + \frac{x\varepsilon}{z} + \frac{R_2^2}{\varepsilon z + R_2^2} \right) \frac{z}{\varepsilon z + R_2^2} - a_1^{(2)}, \quad (15)$$

причем

$$a_1^{(2)} = \frac{1}{4\pi i} \int_{\gamma} \frac{N(t)}{t} dt + A \frac{x\varepsilon}{2R_2^2} \quad (16)$$

и обход γ совершается против движения часовой стрелки.

Перейдем в (14) и (15) к пределу, устремляя z к некоторой точке t дуги γ , соответственно, изнутри S_1 и S_2 , и подставим выражения для $\varphi'_{01}(t)$ и $\varphi'_{02}(t)$ в соотношение

$$\varphi'(t_1) = \varphi'_{01}(t) - \varphi'_{02}(t) + A \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t-\varepsilon} \right); \quad (17)$$

тогда, сопоставляя последнее равенство с (9), получим

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{(t_1 - \bar{t}_1) N(t_1)}{t_1 - t} dt_1 = f_1(t) + f_2(t), \quad (18)$$

где введены обозначения:

$$f_1(t) = -\frac{\pi i(1-x)}{R_2(1+x)} (t^2 - \bar{t}^2) + a_1^{(2)} (t + \bar{t}),$$

$$f_2(t) = A \left(\left(1 + \frac{\bar{t}}{t-\varepsilon} \right) \frac{t}{t-\varepsilon} - \left(1 + \frac{t}{t-\varepsilon} \right) \frac{\bar{t}}{t-\varepsilon} - \varepsilon(1+x) \left(\frac{1}{t-\varepsilon} + \frac{1}{t-\varepsilon} - \frac{2}{\varepsilon} \right) \right).$$

Решая уравнение (18) (5), найдем

$$N(t) = \frac{\omega(t)}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_1(t_1) + f_2(t_1)}{\omega(t_1)} \frac{dt_1}{t_1 - t}, \quad (19)$$

при этом $\omega(z) = \sqrt{(z-a_1)(z-a_2)}$, a_1 и a_2 — концы дуги γ и $a_2 = -\bar{a}_1$.

Выполнив интегрирование в (19), получим

$$N(t) = (\alpha(t) + \beta(t)) \frac{\omega(t)}{t-\bar{t}}, \quad (20)$$

где положено

$$\alpha(t) = -a_1^{(2)} \left(1 - \frac{t}{a}\right) - \frac{\mu(1-c)}{a(1+\chi)} \left(t + ab + \frac{a}{t}(\bar{t} + \bar{a}b)\right),$$

$$\beta(t) = A \frac{a}{\omega(\varepsilon)} \left(\frac{a}{\varepsilon} - a \frac{\omega'(\varepsilon)}{\omega(\varepsilon)} - \frac{\varepsilon}{a}(1+\chi)\right) \left(\frac{1}{t-\varepsilon} + \frac{a}{t} \frac{1}{t-\varepsilon}\right) -$$

$$- A \frac{1}{\varepsilon} \left(1 - \frac{a}{t}\right) + A \frac{a^2}{\omega(\varepsilon)} \left(\frac{1}{(t-\varepsilon)^2} - \frac{a}{t} \frac{1}{(t-\varepsilon)^2}\right),$$

$$a = \sqrt{a_1 a_2} = iR_2, \quad b = \frac{a_1 - \bar{a}_1}{2iR_2}.$$

Присоединяя к соотношению (16) равенство

$$P = - \int_{\gamma} N(t) dt, \quad (21)$$

определим коэффициент $a_1^{(2)}$, а также концы дуги контакта.

Очевидно, наибольшее нормальное давление N_{\max} имеет место в середине дуги контакта. Из формулы (20) вытекает, что оно неограниченно растет при $\varepsilon \rightarrow -a$.

Положив $\varepsilon = k\alpha$ ($1 \geq k > -1$) и $b = -1 + \nu$, получим для $a_1^{(2)}$ и ν следующие выражения:

$$a_1^{(2)} = - \frac{\mu(1-c)}{4(1+\chi)} (2\nu - \nu^2) - \frac{P}{4\pi R_2(1+\chi)} \left(\frac{2(2+k) - k\chi(1+k)}{2(1+k)^3} \nu - k\chi \right), \quad (22)$$

$$\nu = \frac{m + k_1 P}{m + k_2 P} - \sqrt{\left(\frac{m + k_1 P}{m + k_2 P}\right)^2 - \frac{2P(1+\chi)}{m + k_2 P}}, \quad (23)$$

где

$$m = 2\pi R_2 \mu (1-c), \quad k_1 = \frac{8 + k(4 - 2\chi(1+k) + k\chi(1+k)^3)}{4(1+k)^3}, \quad (24)$$

$$k_2 = \frac{8 - 2k(11 + k - 2k^2) + k\chi(1+k)(6k + (1+k)^3)}{4(1+k)^5}.$$

При $k_1 = k_2 = 0$ получим из (23) формулу Герца—Беляева.

Величины N_{\max} , а также обозначенные через s проекции на ось x дуг γ были вычислены нами для различных значений c и k при $P = 10^3$ кг, $R_2 = 5$ см, $\chi = 1,8$, $\mu = 8 \cdot 10^5$ кг/см² и отнесены к $N_{\max}^{(0)}$ и $s^{(0)}$, вычисленным по формулам Герца. Приводим результаты подсчетов.

k	$N_{\max} / N_{\max}^{(0)}$			$s / s^{(0)}$		
	$c = 0,0$	$c = 0,5$	$c = 0,9$	$c = 0,0$	$c = 0,5$	$c = 0,9$
-0,7	1,000	1,004	1,009	1,00	1,00	0,99
-0,9	1,020	1,062	1,174	0,98	0,98	0,85
-0,95	1,142	1,270	2,031	0,87	0,69	0,57

Отсюда видно, что при $k \rightarrow -1$ поверхность касания уменьшается, а напряжение увеличивается с возрастанием отношения радиусов.

Научно-исследовательский институт
подшипниковой промышленности

Поступило
23 XI 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. Hertz, Gesammelte Werke, 1, 1895. ² Н. М. Беляев, Инженерные сооружения и строительная механика, 1924. ³ Г. В. Колосов, Применение комплексной переменной к теории упругости, 1935; Н. И. Muskhelishvili, Некоторые задачи теории упругости, 1935. ⁴ И. Я. Штаерман, ДАН, 25, № 5 (1939). ⁵ T. Carleman, Arkiv för matematik, astronomin och fysik, 16, No. 26 (1922).