Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVI, № 5

МАТЕМАТИКА

А. А. РЕНЬИ

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЧЕТНЫХ ЧИСЕЛ В ВИДЕ СУММЫ ОДНОГО ПРОСТОГО И ОДНОГО ПОЧТИ-ПРОСТОГО ЧИСЛА

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 24 III 1947)

Проблема представления четных чисел как суммы двух и нечетных чисел как суммы трех простых имеется в переписке между Эйлером и Гольдбахом в 1742 г.

В 1937 г. акад. И. М. Виноградов доказал теорему Гольдбаха для нечетных чисел ([1]) с помощью своего метода оценки экспоненциальных сумм. Применяя метод акад. И. М. Виноградова, Н. Г. Чудаков в 1938 г. доказал, что почти все четные числа являются суммой двух простых ([2]). Приближенный результат другого типа был доказан Viggo Brun'ом ([3]) уже в 1920 г. Он доказал своим элементарным методом эратосфенова решета, что всякое четное число может быть представлено как сумма двух почти-простых чисел, т. е. в виде $2N = P_1 + P_2$, где P_1 и P_2 имеют только ограниченное число простых множителей — именно $\leqslant 10$ *.

Th. Estermann ([6]) в 1932 г. дал условное доказательство теоремы, что всякое четное число есть сумма одного простого и одного почти-простого числа (которое имеет не больше 6 простых множителей). Estermann опирался на известную недоказанную гипотезу Римана, расширенную для всех L-рядов Дирихле. Мне удалось доказать теорему Estermann'a без какой-либо гипотезы.

Теорема 1. *Всякое четное число может быть представлено в виде $2N = p + P$, где p — простое и P — почти-простое число, т. е. P имеет не больше чем K простых множителей, где K — абсолютное постоянное.*

Подробное доказательство будет помещено в другом месте. Здесь мы укажем лишь его основные шаги.

Гипотезу Римана оказалось возможным обойти, применяя новую теорему относительно нулей L-рядов (теорема 2). Эту теорему я доказал, опираясь на два метода Ю. В. Линника. Один из них — „большое решето" ([7]), второй находится в его статье ([8]).

Для формулировки теоремы 2 целесообразно ввести новое определение. Как известно, каждый из $\varphi(D)$ характеров по модулю D, где D свободно от квадратов, может быть разложен единственным способом на произведение характеров, принадлежащих к простым множителям числа D. Так, если $D = pq$, где p — простое, $(p, q) = 1$, то всякий характер по модулю D имеет вид $\chi_D(n) = \chi_p(n)\chi_q(n)$, где $\chi_p(n)$, $\chi_q(n)$ — характеры по модулю p, соотв. q. Мы будем называть $\chi_D(n)$ примитивным относительно p, если $\chi_p(n)$ неглавный характер. Оче-

* Тартаковский ([4]) и Бухштаб ([5]) доказали, что вместо 10 достаточно 4.

видно, что характеры по модулю D, которые, согласно нашему определению, примитивны относительно всех простых множителей числа D, являются примитивными и в обычном смысле этого слова.

Теорема 2. *Пусть q — целое, свободное от квадратов, $A \geqslant c_1$* *, $k = \frac{\log q}{\log A} + 1$ *и полагаем* $k \leqslant \log^3 A$. *Для всех простых чисел p, лежащих в промежутке $(A, 2A)$ и взаимно простых с q, за исключением некоторых из них, число которых не превосходит $A^{3/4}$, L-функции Дирихле по модулю $D = pq$*

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \qquad (s = \sigma + it),$$

где $\chi(n)$ — примитивное относительно p, не имеют нулей в прямоугольнике $\sigma \geqslant 1 - \frac{\delta}{k+1}$, $|t| \leqslant \log^3 D$, где $\delta > 0$ — постоянное.

Из теоремы 2 следует, например, что существует бесконечно много таких простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$, что если $\chi(n)$ — неглавный характер по модулю p_n, $L(s, \chi) \neq 0$ для $s = \sigma + it$, $\sigma \geqslant 1 - \frac{\delta}{2}$, $|t| < \log^3 p_n$, где $\delta > 0$ — постоянное.

Пусть

$$H(2N) = \sum_{\substack{p<2N \\ (2N-p,\, B)=1}} \log p \cdot \exp\left(-p \frac{\log 2N}{2N}\right), \tag{1}$$

где $B = \prod_{c_2 \leqslant p \leqslant (2N)^{1/R}} p$, R — целое постоянное.

Пусть дальше

$$P_Q(x) = \sum_{\substack{p<x \\ p \equiv l \bmod Q}} \log p \cdot \exp\left(-p \frac{\log x}{x}\right) = \frac{x}{\varphi(Q) \log x} + R_Q(x), \tag{2}$$

где $(l, Q) = 1$. Согласно методу Viggo Brun'a, легко следует, что

$$H(2N) > \frac{c_3 N}{\log^2 N} - \sum_{Q \in E} |R_Q(2N)|, \tag{3}$$

где множество E определяется следующим образом: E содержит свободное от квадратов число $Q = p_1 p_2 \ldots p_r$ $(p_1 > p_2 > \ldots p_r)$, если

$$c_2 \leqslant p_i \leqslant (2N)^{\frac{1}{Rh^{[i/2]}}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, r, \quad \text{где} \quad h = 1{,}25.$$

Если мы докажем, что $H(2N) > 0$ для $N \geqslant c_7$, очевидно, следует теорема 1. ($K = \max(R + c_2, c_4)$.) Таким образом, вопрос стоит только об оценке суммы

$$\sum_{Q \in E} |R_Q(2N)|. \tag{4}$$

Мы покажем, что

$$\sum_{Q \in E} |R_Q(2N)| < \frac{4N}{\log^3 N}. \tag{5}$$

Для оценки суммы (4) из теоремы 2 выводим теорему 3.

Теорема 3. *Пусть q_1 свободно от квадратов; $A \geqslant c_1$,*

$$\exp((\log x)^{2/5}) < A q_1 < \sqrt{x}.$$

* $c_1, c_2, \ldots$ будут обозначать положительные абсолютные постоянные.

Пусть $k_1 = \frac{\log q_1}{\log (p_1/2)} + 1$, *где* p_1 — *простые,* $A \leqslant p_1 < 2A$, $(p_1, q_1) = 1$. *Полагаем* $k \leqslant \log^3 A$. *Для всех простых* p_1, *за исключением некоторых из них, число которых не превосходит* $A^{3/4}$, *для всякого характера* $\chi(n)$ *по модулю* $D = p_1 q_1$, *который примитивен относительно* p_1, *имеем*

$$\left| \sum_{p \leqslant x} \chi(p) \log p \cdot \exp\left(-p \frac{\log x}{x}\right) \right| \leqslant x^{1-\frac{\delta_1}{k_1+1}}, \tag{6}$$

где $\delta_1 > 0$ — *постоянное.*

Это легко следует из теоремы 2 с помощью известной формулы J. E. Littlewood'а (см. [8])

$$\sum_1^\infty \Lambda(n) \chi(n) e^{-\frac{n}{Y}} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{L'}{L}(s, \chi) \Gamma(s) Y^s \, ds. \tag{7}$$

Из известных результатов E. C. Titchmarsh'а [9], A. Page [10] и C. L. Siegel [11] следует, что для $D \leqslant \exp(c_5 \sqrt{\log x})$, кроме кратных возможно существующего числа D_1*, имеем

$$P_D(x) = \frac{x}{\varphi(D) \log x} + O(x \exp(-c_6 \sqrt{\log x})). \tag{8}$$

Для D_1/D имеем

$$P_D(x) = \frac{x}{\varphi(D) \log x} + O(x \exp(-c_6 \sqrt{\log x})) + O\left(\frac{1}{\varphi(D)} x^{1-\frac{c_\varepsilon}{D_1^\varepsilon}}\right), \tag{9}$$

$\varepsilon > 0$ — произвольное и c_ε — постоянное, которое зависит только от ε. Кроме того, имеем оценку Brun — Titchmarsh'а (см. [9]), что

$$P_D(x) = O\left(\frac{x}{\varphi(D)}\right) \text{ равномерно для } D \leqslant \sqrt{x}. \tag{10}$$

Рассмотрим теперь оценку суммы (4). Пусть $2N = x$ и пусть

$$S_\chi(x) = \sum_{p \leqslant x} \chi(p) \log p \exp\left(-p \frac{\log x}{x}\right). \tag{11}$$

Если $Q \geqslant \exp((\log x)^{2/3})$ дальше $Q = p_1 q_1$, где p_1 — наибольший простой множитель числа Q, и если p_1 не исключено с точки зрения теоремы 3, то из формулы

$$P_Q(x) = \frac{1}{\varphi(Q)} \sum_{(\chi)} \overline{\chi(l)} S_\chi(x) \tag{12}$$

следует

$$P_Q(x) = \frac{1}{\varphi(p_1)} P_{q_1}(x) + O\left(x^{1-\frac{\delta_1}{k_1+1}}\right). \tag{13}$$

Этот процесс редукции мы повторяем для $q_1 = p_2 q_2$, $q_2 = p_3 q_3$ и т. д. до тех пор, пока для $q_s = p_{s+1} q_{s+1}$ условия теоремы 3 не будут выполнены. Тогда мы применяем: если $q_s < \exp(\log x)^{2/3}$ — оценку (8) или (9), если $q_s \geqslant \exp(\log x)^{2/3}$, но p_{s+1} — исключенное простое число,— оценку (10). Таким образом, оценка суммы (4) возводится на оценке слагаемых следующих четырех типов:

---

* D_1 — модуль, для которого существует Siegel'евский нуль $\rho = \sigma + it$, $\sigma > 1 - \frac{c_7}{\sqrt{\log x}}$.

$$\text{I. } x\exp(-c_6\sqrt{\log x}). \quad \text{II. } \frac{1}{\varphi(D)}x^{1-\frac{c_\varepsilon}{D_1^\varepsilon}}. \quad \text{III. } \frac{x}{\varphi(D)}. \quad \text{IV. } x^{1-\frac{\delta_1}{k+1}}.$$

Сумма членов типа I, очевидно, $O\left(\frac{N}{\log^3 N}\right)$.

Сумма членов типа II не превосходит

$$N\log^3 N \exp\left(-\log D_1 - \frac{c_\varepsilon}{D_1^\varepsilon}\log N\right). \tag{14}$$

Величина D_1 неизвестна, но легко получим, что максимальная величина (14) для $1 \leqslant D_1 < \infty$ и для $N \geqslant c_4$, $\varepsilon = 1/8$ не превосходит $N/\log^3 N$.

Сумму членов типа III можно оценить, принимая во внимание, что в каждом промежутке $(A, 2A)$ находятся не больше чем $A^{3/4}$ исключительных простых чисел p^* при данном q, итак

$$\sum_{p^* \geqslant T} \frac{1}{p^*-1} < \frac{\log^2 T}{T^{1/4}} \quad \text{для} \quad T \geqslant c_8. \tag{15}$$

Наконец, для оценки суммы членов типа IV надо пользоваться следующим элементарным свойством множества E: количество чисел $Q = pq$, где p — наибольший простой множитель числа Q, которое принадлежит к множеству E и удовлетворяет условиям $p < q^{1/k}$ ($k \geqslant 1$ целое), не превосходит $(2N)^{\frac{40k}{Rh^{k/2}}}$.

Так, для достаточно большого значения постоянного R мы получаем, что сумма членов каждого из типов не превосходит $N/\log^3 N$ для $N > c_4$, и поэтому

$$\sum_{Q \in E} |R_Q(2N)| < \frac{4N}{\log^3 N} \quad \text{для} \quad N > c_4. \tag{16}$$

Поэтому из (3) и (16) следует, что $H(2N) > c_9 N/\log^2 N$ для $N > c_7$. Тем самым теорема 1 доказана. Число решений представления $2N = p + P$ больше, чем $c_9 N/\log^3 N$.

Естественно было бы ожидать для числа решений оценку $O(N/\log^2 N)$. Наш результат слаб в этом отношении потому, что мы вместо суммы $\Sigma \log p$ пользовались суммой $\Sigma \log p \cdot \exp\left(-p\frac{\log x}{x}\right)$ для того, чтобы принимать интеграл Littlewood'а (7), который полезен для малой высоты свободного от нулей прямоугольника в теореме 2.

Таким же образом, как теорема 1, доказывается

Теорема 4. *Существует бесконечно много простых чисел p, для которых $P = p + 2$ почти-простое, т. е. число простых множителей числа P не превосходит абсолютную постоянную K.*

Теорема 4 является результатом, близким к известной гипотезе, что существует бесконечно много простых „близнецов“.

Поступило
24 III 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Виноградов, Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, **10** (1937). [2] Н. Г. Чудаков, Изв. АН СССР, сер. математ., № 1, 25 (1938). [3] Viggo Brunn, Videnskapselskapets Skrifter, **1**, No. 3, Kristiania, 1 (1920). [4] В. А. Тартаковский, ДАН, **23**, № 2 (1939). [5] А. А. Бухштаб, ДАН, **29**, № 8—9 (1940). [6] Th. Estermann, J. f. reine u. ang. Math., **168**, H. 2, 106 (1932). [7] Ю. В. Линник, ДАН, **30**, № 4, 292 (1941). [8] U. V. Linnik, Мат. сб., **15** (57), № 1, 3 (1944). [9] E. C. Titchmarsh, Rend. Palermo, **54**, 414 (1930). [10] A. Page, Proc. London Math. Soc. (2), **39**, 116 (1935). [11] C. L. Siegel, Acta Arithmetica, **1**, 83 (1936).