Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVI, № 5

МАТЕМАТИКА

Академик Н. Н. ЛУЗИН

О ЛОКАЛИЗАЦИИ ПРИНЦИПА КОНЕЧНОЙ ПЛОЩАДИ

Этот принцип, ведущийся еще от Фейера и относящийся к рядам Тэйлора, формулируется следующим образом:

Всякий ряд Тэйлора

$$Z = f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots, \tag{1}$$

сходящийся внутри единичного круга, сходится почти всюду на его периферии С, если площадь поверхности Риманна S, пробегаемая точкою Z при изменении z внутри С, имеет конечную величину.

Здесь речь идет о некотором глобальном (а не о локальном) свойстве, потому что ничего не известно о сходимости ряда (1), если площадь, покрываемая точкою Z, конечна при перемещении z вблизи какой-либо дуги окружности C без того, чтобы описывать всю ее внутренность, и если при этом не делается никакой дополнительной гипотезы относительно коэффициентов a_n.

Полную аналогию являет известное классическое предложение о равномерной сходимости ряда (1) на всей периферии C единичного круга, если функция $f(z)$ повсюду продолжаема за окружность C; коррелятивное л о к а л ь н о е предложение есть знаменитая теорема Фату о равномерной сходимости ряда (1) на всякой дуге окружности C, через которую продолжаема функция $f(z)$, если только коэффициент a_n стремится к нулю с возрастанием его индекса n.

Таким образом, дополнительная гипотеза

$$\lim_{n=\infty} a_n = 0 \tag{2}$$

узаконивает переход от классического глобального предложения к локальной теореме Фату.

Цель настоящего сообщения показать, что та же самая дополнительная гипотеза (2) узаконивает переход от глобальной теоремы Фейера к ее локальной форме.

1. Пусть aOb — какой-нибудь фиксированный круговой сектор, $a = e^{i\alpha}$ и $b = e^{i\beta}$, $\alpha < \beta$. Мы предполагаем, что площадь, покрываемая точкою Z, конечна, когда z описывает некоторый объемлющий круговой сектор AOB, содержащий сектор aOb внутри в строгом смысле (пренебрегая началом O).

Вводим следующие обозначения: $d^2\Phi(z)/dz^2 = f(z)$ внутри единичного круга, $P(z) = (z-a)^2(z-b)^2$, $\Phi^*(z) = \Phi(z)P(z)$, $f^*(z) = f(z)P(z)$, $S_n^*(z)$ есть сумма первых n членов разложения функций $f^*(z)$ по степеням z, $x_0 = e^{i\theta_0}$ есть неподвижная точка, содержащаяся внутри дуги ab окружности C (исключая границы ее: $\alpha < \theta_0 < \beta$)

и, наконец, $x = \rho e^{i\vartheta_0}$, где $\rho = 1 - \frac{1}{n}$ при n целом положительном, есть точка внутри окружности C, лежащая на неподвижном радиусе Ox_0 и стремящаяся к его концу x_0, когда n безгранично возрастает.

Так как площадь, покрываемая точкою Z, когда z описывает сектор AOB, имеет конечную величину, всегда можно выбрать неподвижные точки a и b так, чтобы функции $f(z)$ и $d\Phi(z)/dz$ были равномерно непрерывными на всякой правильной дорожке, содержащейся внутри единичного круга, примыкающей к точке a или к b и не касательной к его периферии C.

Начертим внутри единичного круга отрезок Ox радиуса Ox_0, содержащийся между точками O и x, а также замкнутую кривую без кратных точек Γ, содержащую этот отрезок внутри. Если Γ состоит из конечного числа правильных дуг, мы можем писать равенство

$$f^*(z) - S_n^*(x_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f^*(z)\left[\frac{1}{z-x} - \frac{1}{z-x_0} + \left(\frac{x_0}{z}\right)^n \frac{1}{z-x_0}\right] dz. \quad (3)$$

Чтобы оценить эту разность, возьмем кривую Γ, составленную так: во-первых, из дуги $\gamma_r = (a_r, b_r)$ окружности C_r центра O и радиуса r, $\rho < r < 1$, находящейся внутри сектора aOb и имеющей своими концами точки a_r и b_r на неподвижных радиусах Oa и Ob; во-вторых, из двух отрезков $\sigma_a = [a_r, a]$ и $\sigma_b = [b_r, b]$ этих радиусов и, в-третьих, из некоторой правильной дуги γ, уже независимой от n, у которой только одни концы a и b находятся на окружности C, не являясь, однако, точками прикосновения. Итак, согласно (3), мы имеем

$$f^*(x) - S_n^*(x_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma + \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_a} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_b} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}. \quad (4)$$

Здесь, прежде всего, оба интеграла $\int_{\sigma_a}$ и $\int_{\sigma_b}$, очевидно, стремятся к нулю с возрастанием целого n и, притом, равномерно, когда точка x_0 движется вдоль дуги ab окружности C.

С другой стороны, мы имеем

$$\int_\gamma = \int_\gamma f^*(z)\left[\frac{1}{z-x} - \frac{1}{z-x_0}\right] dz + \int_\gamma f^*(z)\left(\frac{x_0}{z}\right)^n \frac{1}{z-x}\, dz.$$

Первый интеграл явно стремится к нулю при возрастании n и также равномерно на дуге ab. Второй интеграл тоже обладает этим же свойством, но, чтобы обнаружить это, необходимо, после двухкратного интегрирования по частям, ввести вспомогательную гипотезу (2), что является излишним для других интегралов.

Остается оценить лишь последний интеграл. Здесь мы явно имеем

$\int_{\gamma_r} = \int_{\gamma_r} f^*(z)\, d\lambda_n(z)$, положив $\lambda_n(z) = \log\left(1 - \frac{x}{z}\right) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\frac{x_0}{z}\right)^k$. Интегрирование по частям дает

$$\int_{\gamma_r} = [f^*(z)\lambda_n(z)]_{a_r}^{b_r} - \int_{\gamma_r} f^{*\prime}(z)\lambda_n(z)\, dz.$$

Но проинтегрированная часть бесконечно мала в пределах для $n = +\infty$. Поэтому

$$f^*(x) - S_n^*(x_0) = \varepsilon_n(x_0) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} f^{*\prime}(z)\,\lambda_n(z)\,dz, \tag{5}$$

где $\varepsilon_n(x_0)$ равномерно на дуге ab стремится к нулю, когда n возрастает. Так как $z = re^{i\varphi}$, $\rho < r < 1$ и $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$ на дуге γ_r, то

$$|f^*(x) - S_n^*(x_0)| \leqslant |\varepsilon_n(x_0)| + \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\beta} |f^{*\prime}(z)|\,|\lambda_n(z)|\,r\,d\varphi. \tag{6}$$

Интегрируя это неравенство по r между пределами ρ и 1, имеем

$$|f^*(x) - S_n^*(x_0)|(1-\rho) \leqslant$$
$$\leqslant |\varepsilon_n|(1-\rho) + \frac{1}{2\pi}\iint_D |f^{*\prime}(z)|\,|\lambda_n(z)|\,d\omega, \tag{7}$$

где $d\omega$ есть элемент площади, а двойной интеграл распространен на область, ограниченную окружностями C_ρ и C и неподвижными радиусами Oa и Ob.

Применение неравенства Шварца нам дает

$$|f^*(x) - S_n^*(x_0)| \leqslant |\varepsilon_n| + \frac{1}{2\pi}\sqrt{\iint_D |f^{*\prime}(z)|\,d\omega}\sqrt{\frac{\iint_D |\lambda_n(z)|^2\,d\omega}{(1-\rho)^2}}. \tag{8}$$

Величина первого двойного интеграла в точности равна площади, покрываемой точкою $Z^* = f^*(z)$, когда z описывает область D; значит, он стремится к нулю при возрастании целого n.

С другой стороны, $\rho = 1 - \frac{1}{n}$, и произведение $n^2 \iint_D |\lambda_n(z)|^2\,d\omega$ явно остается ограниченным при увеличении целого n. Значит, разность $f^*(x) - S_n^*(z_0)$ стремится к нулю при возрастании n. Важно заметить, что $f(z)$ равномерно непрерывна на всякой правильной дорожке, лежащей внутри единичного круга и примыкающей к точке x_0 его периферии C без прикосновения к ней, причем это имеет место для всех точек x_0 дуги ab, кроме множества x_0 меры нуль. И так как $x = \rho x_0$ и $\rho = 1 - \frac{1}{n}$, то ясно, что разность $f^*(x_0) - S_n^*(x_0)$ стремится к нулю для $n = +\infty$.

Следовательно, разложение Тэйлора функции $f^*(z) = f(z)\,P(z)$ сходится в точке $z = x_0$. Отсюда заключаем о сходимости разложения Тэйлора в точке x_0 самой заданной функции $f(z)$, что и доказывает локальность принципа конечной площади*.

2. Целью исследования является изучение поведения разложений Тэйлора ограниченных аналитических функций $f(z)$ на периферии их круга сходимости. Эта проблема была поставлена П. дю Буа Реймондом еще в 1876 г.

Здесь прежде всего нужно знать, можно ли взять рассмотренные точки a и b внутри единичного круга зависящими от целого n и стремящимися к неподвижной точке x_0 его периферии C при возрастании n.

Смысл вопроса поясняет предложение (1):

---

* Вероятность локализации принципа конечной площади была высказана в 1930 г. Марселем Орбек (1).

Для всякой заданной ограниченной аналитической функции $Z = f(z)$ внутри единичного круга C можно начертить выпуклую замкнутую кривую Γ_x, лежащую внутри C и прикасающуюся к его периферии в ее точке x_0, такую, что площадь, покрываемая точкою Z при перемещении точки z внутри Γ_{x_0}, заведомо конечна; это справедливо для всех точек x_0 окружности C, кроме, может быть, множества меры нуль.

Однако порядок прикосновения > 1 кривой Γ_{x_0} к окружности C остается неизвестным. Поэтому было бы интересно иметь пример ограниченной аналитической функции $Z = f(z)$, для которой площадь, покрываемая точкою Z при движении точки z внутри любого круга Γ, прикасающегося к периферии C единичного круга, всегда бесконечна.

Как весьма вероятное является предложение: если производная $f'(z)$ ограниченной аналитической функции $f(z)$ не принимает внутри единичного круга какое-нибудь фиксированное значение, разложение Тэйлора функции $f(z)$ сходится почти всюду на его периферии C.

Заметим, что в изучении рядов Тэйлора можно сперва удовольствоваться лишь автоморфными ограниченными функциями, потому что аналитическая ограниченная функция может быть рассматриваема как ограниченная автоморфная функция, слегка деформированная.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР

Поступило
22 II 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] N. Lusin, Bull. Calcutta Math. Soc., **20**, 141, 151 (1930).