Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LV, № 8

АСТРОНОМИЯ

Л. С. ГАНДИН

О ТЕОРЕТИЧЕСКОМ ОБЪЯСНЕНИИ НАБЛЮДАЕМОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СОЛНЕЧНЫХ ПЯТЕН ПО ШИРОТЕ

(Представлено академиком С. А. Христиановичем 8 X 1946)

Неравномерность распределения солнечных пятен по гелиографической широте представляет собой широко известный факт. Именно, большинство пятен наблюдается в двух зонах между широтами 10 и 30° по обе стороны от экватора. В широтах $\varphi > 40°$ пятна встречаются крайне редко, а при $\varphi > 60°$ не наблюдались. В начале 11-летнего периода солнечной деятельности зоны солнечных пятен возникают вблизи широты $\varphi = 30°$, затем они постепенно перемещаются по направлению к экватору, причем к концу периода пятнообразующая деятельность почти совершенно прекращается ([1], [2]). До настоящего времени не существует теоретического объяснения описанннoго факта.

В настоящей заметке делается попытка теоретического объяснения распределения солнечных пятен путем приложения к ним теории конвективных ячеек Бенара ([3], [4]).

Возможность такого приложения обусловливается, прежде всего, удовлетворительным совпадением результатов конвективной теории солнечных пятен с данными наблюдений и, в частности, наличием в солнечном пятне конвективной циркуляции, характерной для ячейки Бенара ([2]).

Последние оценки глубины солнечных пятен, показывающие, что вертикальные и горизонтальные размеры их имеют одинаковый порядок величины ([5]), также подтверждают возможность приложения к вопросу об образовании солнечных пятен теории ячеек Бенара. Для такого приложения теория ячеек Бенара, построенная в работах Релея ([6]), Джефриса ([7], [8]) и Пелью и Саутвелла ([4]), должна быть несколько расширена за счет рассмотрения действия силы Кориолиса.

Теория ячеек Бенара основана на применении к уравнениям гидромеханики и теплопроводности для слоя жидкости, заключенного между двумя горизонтальными плоскостями, метода малых колебаний.

При этом разыскиваются стационарные малые колебания, являющиеся для рассматриваемой задачи граничным случаем между устойчивыми и неустойчивыми колебаниями и представляющие поэтому наибольший интерес. Изменение плотности жидкой частицы принимается зависящим только от изменения ее температуры и влияющим только на ее вес.

Если учитывать в уравнениях движения силу Кориолиса, то уравнения стационарных малых колебаний примут вид

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} &= \nu\nabla^2 u + 2\omega_z v - 2\omega_y w,\\
\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy} &= \nu\nabla^2 v + 2\omega_x w - 2\omega_z u,\\
\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} &= \nu\nabla^2 w + 2\omega_y u - 2\omega_x v + g\alpha\vartheta,\\
\frac{\partial u}{\partial x} &+ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,\\
-\beta w &= \varkappa\nabla^2\vartheta,
\end{aligned} \tag{1}$$

где x, y, z — координаты, причем ось z направлена вертикально вверх, а начало координат расположено на нижней горизонтальной границе слоя жидкости; u, v, w — составляющие вектора скорости; ϑ — отклонение температуры от статического распределения $T = T_б - \beta z$; p — отклонение давления от статического; ω_x, ω_y, ω_z — составляющие вектора угловой скорости вращения; ρ — плотность жидкости; α — термический коэффициент расширения; ν — кинематический коэффициент вязкости; $\varkappa$ — коэффициент температуропроводности; g — ускорение силы тяжести.

Из системы (1) находим уравнение для вертикальной составляющей скорости

$$\Big[\varkappa\nu^2\nabla^6 + 4\varkappa\Big(\omega_x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \omega_y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \omega_z^2\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2\omega_y\omega_z\frac{\partial^2}{\partial y\partial z} + 2\omega_z\omega_x\frac{\partial^2}{\partial z\partial x} + 2\omega_x\omega_y\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\Big) - \beta g\alpha\nu\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)\Big] w = 0. \tag{2}$$

Горизонтальные границы слоя жидкости считаем свободными поверхностями, на которых поддерживается постоянная температура. Тогда на них (при $z = 0$ и $z = h$, где h — глубина слоя) выполняются граничные условия $w = \partial u/\partial z = \partial v/\partial z = \vartheta = 0$. Пользуясь уравнениями (1), получаем из этих условий граничные условия для w по z:

$$\text{при}\quad z = 0,\ h \qquad w = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} = \ldots = 0. \tag{3}$$

Соответственно условиям (3), ищем решение уравнения (2) в виде

$$w = e^{i\pi\left(\frac{z}{h} + \lambda\frac{x}{h} + \mu\frac{y}{h}\right)}, \tag{4}$$

где λ и μ — некоторые безразмерные параметры. Подставляя (4) в (2), получаем

$$(1 + \lambda^2 + \mu^2)^3 + C(1 + l_x\lambda + l_y\mu)^2 - A(\lambda^2 + \mu^2) = 0, \tag{5}$$

где обозначено:

$$l_x = \frac{\omega_x}{\omega_z},\quad l_y = \frac{\omega_y}{\omega_z},\quad C = \frac{4\omega_z^2 h^4}{\nu^2\pi^4},\qquad A = \frac{\alpha\beta g h^4}{\varkappa\nu\pi^4}.$$

Ищем теперь при фиксированных значениях параметров C, l_x и l_y критическое значение параметра A, т. е. минимальное значение $A_{кр}$, при котором имеет место конвективная циркуляция. Полагая для этого $\partial A_{кр}/\partial\lambda = \partial A_{кр}/\partial\mu = 0$, получаем прежде всего

$$l_x\mu = l_y\lambda,$$

после чего, вводя $\lambda^2+\mu^2=a^2$, $l_x{}^2+l_y{}^2=\gamma^2$, находим

$$A_{\text{кр}}=\frac{1}{a^2}\left[(1+a^2)^3+C(1+a\gamma)^2\right], \tag{6}$$

где a подчинено условию $\partial A_{\text{кр}}/\partial a=0$ или

$$a^6+\frac{3}{2}a^4-\frac{1}{2}C\gamma a-\frac{C+1}{2}=0. \tag{7}$$

Из равенств (6) и (7) следует, что действие силы Кориолиса увеличивает относительную горизонтальную протяженность циркуляционной ячейки, характеризуемую параметром a, и приводит к увеличению устойчивости слоя, т. е. к увеличению критического значения числа A. При отсутствии силы Кориолиса ($C=\gamma=0$) имеем $a^2=1/2$, $A_{\text{кр}}=27/4$ — критическое значение, полученное впервые Релеем ([6]).

Сформируем теперь нашу задачу следующим образом. Пусть над всей поверхностью небесного тела, вращающегося с угловой скоростью ω, имеется слой некоторого газа фиксированной толщины h с фиксированным положительным вертикальным температурным градиентом β. Пусть, далее, при данном значении β слой газа находится в устойчивом равновесии. Начнем увеличивать значение β сразу во всем слое. Спрашивается, на какой параллели конвективное движение начнется раньше всего, т. е. при наименьшем значении β.

Для решения этой задачи следует в равенстве (6) перейти к более удобным параметрам — модулю угловой скорости $\omega=\sqrt{\omega_x{}^2+\omega_y{}^2+\omega_z{}^2}$ и углу $\varphi=\arcsin\frac{\omega_z}{\omega}$, после чего (6) примет вид

$$A=\frac{1}{a^2}\left[(1+a^2)^3+B\sin^2\varphi\,(1+a\operatorname{ctg}\varphi)^2\right], \tag{8}$$

где $B=C/\sin^2\varphi=4\omega^2h^4/\nu^2\pi^4$, и потребовать выполнения равенств $\partial A/\partial\varphi=0$, $\partial A/\partial a=0$. Эти равенства легко преобразуются к виду

$$a=\operatorname{ctg}\varphi, \tag{9}$$

$$\operatorname{ctg}^6\varphi+\frac{3}{2}\operatorname{ctg}^4\varphi-\frac{1}{2}=\frac{B}{2}=\frac{2\omega^2h^4}{\nu^2\pi^4}. \tag{10}$$

Равенство (9) показывает, что отношение горизонтальных размеров возникающих конвективных циркуляций к высоте слоя пропорционально котангесу широты, на которой эти циркуляции возникают. Уравнение (10) представляет собой соотношение между широтой, на которой впервые возникает конвективная циркуляция, и внешними параметрами задачи, главным образом высотой слоя h. Анализируя уравнение (10), заметим прежде всего, что правая часть его есть величина существенно положительная. Поэтому должно выполняться неравенство $\operatorname{ctg}^2\varphi\geqslant 1/2$, т. е. $\varphi\leqslant\operatorname{arc\,tg}\sqrt{2}=54°40'$, причем $\varphi=54°40$ есть значение асимптотическое, ибо оно достигается при $B=0$. С другой стороны, имеем асимптотическое значение $\varphi=0$, очевидно, достигающееся при $B=\infty$.

Таким образом, уравнение (10) показывает, что зона образования солнечных пятен лежит между широтами $+54°40'$ и $-54°40'$, причем пятнообразующая деятельность менее вероятна вблизи границ этой зоны, а также вблизи экватора, чем в промежуточных областях зоны. Тот же вывод относится и к конвективной циркуляции на других небесных телах, причем граница $\pm 54°40'$ является универсальной, не зависящей ни от каких параметров задачи.

Уравнение (10) позволяет, вообще говоря, не только установить границы изменения критической широты φ, но и находить при заданных значениях h, ν и ω точное значение φ, а совместно с уравнением (8), которое, пользуясь (9), можно переписать в виде

$$A = \frac{1}{\cos^2\varphi}\left(\frac{1}{\sin^4\varphi} + B\right),$$

находить также критическое значение температурного градиента β. Однако в параметры A и B входят коэффициенты $\varkappa$ и ν; понятно, что в рассматриваемой задаче их следует заменить коэффициентом турбулентной диффузии K. Поскольку же в настоящее время имеется чрезвычайно мало сведений о значении K в фотосфере Солнца (или на поверхности других небесных тел), то могут быть произведены лишь грубые оценки, которые, как нетрудно показать, дают хорошее совпадение.

Что касается изменения широтного расположения зоны пятнообразования в течение 11-летнего периода, то для объяснения этого факта необходимы дополнительные гипотезы (изменение h или K), на которых останавливаться не будем.

В заключение автор считает своей приятной обязанностью выразить свою признательность М. И. Юдину и М. И. Будыко за ряд ценных советов

Поступило
8 X 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ч. Аббот, Солнце, 1936. [2] M. Waldmeier, Ergebnisse und Probleme der Sonnenforschung, 1941. [3] H. Bénard, Ann. Phys. Chem., **23**, (1901). [4] A. Pellew and R. V. Southwell, Proc. Roy. Soc., A. **176**, No. 966, 312 (1940). [5] А. И. Лебединский и Л. Э. Гуревич, ЖЭТФ. **16**, в. 9, 832, 840 (1946). [6] Lord Rayleigh, Phil. Mag., **32**, 312 (1916). [7] H. Jeffreys, Phil. Mag., **2**, ser. VII (1926). [8] H. Jeffreys, Proc. Roy. Soc., A. **118**, 195 (1928).