Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVI, № 4

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Я. Н. ФЕЛЬД

ИЗЛУЧАЮЩИЕ ЩЕЛИ В НАСТРОЕННЫХ ЭНДОВИБРАТОРАХ

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 16 XII 1946)

В работах ([1], [2]) было получено и исследовано уравнение, определяющее закон распределения напряжения V вдоль узкой щели, прорезанной на поверхности эндовибратора (или волновода), возбуждаемого изнутри линейным проводом l_i с током J. Уравнение это имеет вид ([2])

$$L[V]=\alpha G[V]+\alpha\frac{i\pi\omega\mu}{c}H_{\tau}^{0}(\tau);\quad V=0 \quad \text{при} \quad \tau=0, l. \tag{1}$$

Здесь

$$L[V]=\left(\frac{d}{d\tau^2}+k^2\right)V, \tag{2}$$

$G[V]$ — линейный относительно V оператор, $\alpha=\frac{1}{2\ln(kd/4)}$ — малый параметр, где d — ширина щели, $k=2\pi/\lambda$, а λ — длина волны, ω — угловая частота, μ — магнитная проницаемость, $c=3\cdot10^{10}$, τ — длина дуги, отсчитываемая вдоль щели от одного из ее концов до переменной точки на щели $q_0(\tau)$, $\vec{E}^0$, $\vec{H}^0$ — поле, создаваемое током J внутри эндовибратора при отсутствии щели, а H_{τ}^{0} — проекция $\vec{H}^0$ на направление возрастания τ в точке $q_0(\tau)$.

Если ω_1 — одна из собственных (резонансных) частот неразрезанного, замкнутого эндовибратора, то при $\omega\to\omega_1$ левая, а следовательно, и правая части (1) сохраняют смысл, оставаясь конечными. Таким образом, и при $\omega\to\omega_1$ уравнение (1) определяет V на щели. Однако методы решения (1), данные в ([1], [2]), использующие малость параметра α, становятся абсолютно не применимыми, так как H_{τ}^{0} и $G[V]$ обращаются при этом в отдельности в бесконечность. Последнее вытекает из самого определения H_{τ}^{0} (а также G), ибо при его расчете эндовибратор считается замкнутым и идеально проводящим. Поэтому мы займемся получением такого уравнения для V, все члены которого остаются конечными и регулярными при $\omega\to\omega_1$ и решение которого можно довести до конца, используя малость α.

Условимся для определенности считать ω_1 m-кратной собственной частотой неразрезанного эндовибратора, которой соответствуют свободные колебания, характеризуемые полями $\vec{e}^{(\nu)}$, $\vec{h}^{(\nu)}$ ($\nu=1, 2, \ldots, m$).

Введем прежде всего некоторую систему функций $a_n(\tau)$ ($n=0, 1, 2, \ldots, m$). Дифференцируя уравнение (1) n раз по τ и умножая затем на $a_n(\tau)$, найдем, суммируя результат по n от 0 до m,

$$\sum_{n=0}^{m} a_n(\tau)\frac{d^n}{d\tau^n}L[V]=\alpha\sum_{n=0}^{m} a_n(\tau)\frac{d^n}{d\tau^n}G[V]+\alpha\frac{i\pi\omega\mu}{c}\sum_{n=0}^{m} a_n(\tau)\frac{d^n}{d\tau^n}H_{\tau}^{0}. \tag{3}$$

Постараемся выбрать функции $a_n(\tau)$ так, чтобы каждая сумма в отдельности оставалась конечной и определенной также при $\omega \to \omega_1$. Чтобы выполнить это, преобразуем последнюю сумму уравнения (3).

Для этого введем регулярное внутри эндовибратора вспомогательное поле $\vec{\mathfrak{E}}, \vec{\mathfrak{H}}$, определенное там при помощи граничных условий

$$[\vec{n}[\vec{\mathfrak{E}}(q)\,\vec{n}]] = \begin{cases} 0 & \text{на} \quad s_i \\ \sum_{n=0}^{m} a_n(\tau) \dfrac{d^n}{d\tau^n} \delta(R)\,\vec{t}(q) & \text{на } s. \end{cases} \tag{4}$$

Здесь s — геометрическая поверхность щели; s_i — внутренняя сторона поверхности эндовибратора за вычетом s; $\vec{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности в точке q (не путать с целым числом n); δ — функция Дирака; R — расстояние между точкой наблюдения q и точкой $q_0(\tau)$, находящейся на поверхности щели s, в сечении ее, характеризуемом дугой τ, $\vec{t}(q)$ — единичный вектор, касательный к s в точке q, направленный поперек щели.

Применяя к полям $\vec{E}^0, \vec{H}^0$ и $\vec{\mathfrak{E}}, \vec{\mathfrak{H}}$ лемму Лоренца, найдем

$$\int\limits_{(s+s_i)} \{[\vec{E}^0 \vec{\mathfrak{H}}] - [\vec{\mathfrak{E}}\,\vec{H}^0]\}\,\vec{ds} = \frac{4\pi}{c} \int\limits_{(l_i)} J\vec{\mathfrak{E}}\,\vec{dl}_i.$$

Отсюда, учитывая нулевые граничные условия для касательной составляющей $\vec{E}^0$ на $s+s_i$ и формулу (4), получим, используя свойства δ-функции,

$$\sum_{n=0}^{m} a_n(\tau) \frac{d^n}{d\tau^n} H^0_{\tau} = -\frac{4\pi}{c} \int\limits_{(l_i)} J\vec{\mathfrak{E}}\,\vec{dl}_i. \tag{5}$$

Таким образом, каждая сумма основного уравнения (3) останется конечной при $\omega = \omega_1$, если этому условию будет удовлетворять вспомогательное поле $\vec{\mathfrak{E}}, \vec{\mathfrak{H}}$ (см. (5)).

Отличие касательной составляющей $\vec{\mathfrak{E}}$ на s от нуля позволяет считать, что поле $\vec{\mathfrak{E}}, \vec{\mathfrak{H}}$ создается сторонней эдс $\vec{E}^{\text{ст}}$ частоты ω, приложенной к s-части замкнутой идеально проводящей поверхности $s+s_i$ и равной

$$\vec{E}^{\text{ст}} = -[n[\vec{\mathfrak{E}}\,n]] \quad \text{на } s. \tag{6}$$

При резонансе $\omega = \omega_1$ поле $\vec{\mathfrak{E}}, \vec{\mathfrak{H}}$ будет конечным только при условии равенства нулю работы сторонней эдс над полями $\vec{e}^{(\nu)}, \vec{h}^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, m)$ свободных колебаний частоты ω_1. Это условие равносильно равенствам

$$\int\limits_{(s)} [\vec{E}^{\text{ст}}\,\vec{h}^{(\nu)}]\,\vec{ds} = 0, \quad \nu = 1, \ldots, m,$$

или, учитывая формулы (6) и (4),

$$\sum_{n=1}^{m} a_n(\tau) \frac{d^n}{d\tau^n} h^{(\nu)}_{\tau} = -a_0(\tau)\,h^{(\nu)}_{\tau}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, m, \tag{7}$$

где $h^{(\nu)}_{\tau}$ — проекция вектора $\vec{h}^{(\nu)}$ на направление возрастания τ (т. е. вдоль щели) в точке $q_0(\tau)$.

Разрешая эту систему уравнений относительно $a_n(\tau)$, найдем искомые значения этих функций, при которых поле $\vec{\mathfrak{E}}, \vec{\mathfrak{H}}$, а значит и отдельные суммы в уравнении (3) остаются конечными для $\omega \to \omega_1$. Так как неизвестных $a_n(\tau)$ $(n=0, 1, \ldots, m)$ больше, чем уравнений, то одно из них, например $a_0(\tau)$, остается произвольным. Выбирая его наиболее рациональным, с нашей точки зрения, образом, найдем

$$a_0(\tau) = \left| d^\mu h_\tau^{(\nu)} / d\tau^\mu \right|, \quad a_n(\tau) = -\Delta_n, \quad n = 1, 2, \ldots, m, \tag{8}$$

где $\left| d^\mu h_\tau^{(\nu)} / d\tau^\mu \right|$ — определитель m-го порядка, у которого на пересечении ν-й строки и μ-го столбца стоит член $d^\mu h_\tau^\nu / d\tau^\mu$, а Δ_n — определитель, получаемый из него заменой n-го столбца столбцом с общим членом $h_\tau^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, m)$.

В дальнейшем будем считать функции $a_n(\tau)$ заданными при помощи формул (8). Уравнение (3) мы при этом запишем в виде

$$\sum_{n=0}^{m} a_n(\tau) \frac{d^n}{d\tau^n} L[V] = \alpha Q[V] + \alpha\Phi(\tau), \tag{9}$$

где

$$\Phi(\tau) = -\frac{i\pi\omega\mu}{c} \sum_{n=0}^{m} a_n(\tau) \frac{d^n}{d\tau^n} H_\tau^0, \tag{9'}$$

а $Q[V]$ — линейный относительно V оператор, равный первой сумме правой части равенства (3).

Уравнение (9) совместно с граничными условиями $V=0$ при $\tau=0, l$ определяет напряжение на щели для интервала частот, содержащих $\omega=\omega_1$, причем каждый член уравнения (9) остается конечным и регулярным (в отличие от уравнения (1)) также для резонансной частоты $\omega=\omega_1$. Поэтому для решения уравнения (9) может быть применен метод разложения по малому параметру α. Остановимся подробнее на случае простого не кратного собственного значения ω_1, когда $m=1$. Формулы (8) дают при этом следующие значения для $a_n(\tau)$: $a_0(\tau) = dh_\tau / d\tau$, $a_1(\tau) = -h_\tau$, и уравнение (9) принимает вид

$$\frac{dh_\tau}{d\tau} L[V] - h_\tau \frac{d}{d\tau} L[V] = \alpha Q[V] + \alpha\Phi(\tau), \quad V=0 \text{ при } \tau = 0, l. \tag{10}$$

Полагая $\omega = \omega_1$, будем искать решение при помощи ряда

$$V = V_0 + \alpha V_1 + \alpha^2 V_2 + \ldots \tag{11}$$

Подставляя его в (10), получим следующую систему уравнений, определяющих коэффициенты ряда:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dh_\tau}{d\tau} L[V_0] - h_\tau \dfrac{d}{d\tau} L[V_0] = 0, \quad V_0 = 0 \text{ при } \tau = 0, l \\ \dfrac{dh_\tau}{d\tau} L[V_1] - h_\tau \dfrac{d}{d\tau} L[V_1] = Q[V_0] + \Phi(\tau), \quad V_1 = 0 \text{ при } \tau = 0, l \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \tag{12}$$

При длине щели $l \neq n\lambda/2$ $(n = 1, 2, \ldots)$ уравнение для V_0 (см. также (2)) имеет следующее общее решение, удовлетворяющее граничным условиям:

$$L[V_0] = Ah_\tau, \quad V_0 = -\frac{A\sin(k\tau)}{k\sin(kl)} \int_0^l h_\tau(x) \sin k(l-x)\, dx +$$

$$+ \frac{A}{k} \int_0^\tau h_\tau(x) \sin k(\tau - x)\, dx, \tag{13}$$

где A — постоянная интегрирования, которую можно определить из условия ортогональности V_0 к правой части уравнения для V_1. Однако при этом приходится оперировать с довольно сложным оператором Q, чего можно избежать. Действительно, применяя к полю $\vec{E}, \vec{H}$ (возбуждаемому внутри эндовибратора со щелью током J) и полю свободного колебания $\vec{e}, \vec{h}$ частоты ω_1 лемму Лоренца, немедленно найдем следующее интересное соотношение*:

$$\int_0^l V h_\tau d\tau = \frac{4\pi}{c} \int_{l_i} J \vec{e}\, \vec{dl}_i. \tag{14}$$

Здесь слева интегрирование идет вдоль щели. Подставляя в (14) значение $V \cong V_0$ формулы (13), получим простое выражение для постоянной A:

$$A = \frac{4\pi}{c} \frac{\int\limits_{l_i} J \vec{e}\, \vec{dl}_i}{\int\limits_0^l (V_0 / A)\, h_\tau d\tau} \tag{15}$$

(V_0 / A не зависит от A).

Для практических целей чаще всего достаточно ограничиться первым отличным от нуля членом ряда (11). Таким образом, при $l \neq n\lambda / 2$ $V = V_0 + O(\alpha)$, где $V_0 = O(1)$ (формулы (13), (15)).

Переходя к случаю $l = n\lambda/2$, легко видеть, что единственным, удовлетворяющим граничным условиям, решением первого уравнения системы (12) является

$$V_0 = M \sin k\tau. \tag{16}$$

Что касается постоянной M, то ее также можно найти, подставив $V \cong V_0$ в уравнение (14) и разрешая его относительно M:

$$M = \frac{4\pi}{c} \frac{\int\limits_{(l_i)} J \vec{e}\, \vec{dl}_1}{\int\limits_0^l h_\tau \sin k\tau d\tau}.$$

Следовательно, при $l = n\lambda / 2$

$$V = M \sin k\tau + O(\alpha). \tag{17}$$

Таким образом, при резонансном эндовибраторе $\omega = \omega_1$ напряжение V будет порядка $O(1)$ при любых длинах щели l, в отличие от случая $\omega \neq \omega_1$, когда при $l \neq n\lambda / 2$, $V = O(\alpha)$ (см. ([2])). Что касается самого характера изменения напряжения вдоль щели, то он (при $m = 1$) остается тем же, что и в случае $\omega \neq \omega_1$. Аналогично рассматривается случай, когда $m > 1$.

Поступило
16 XII 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Я. Н. Фельд, ДАН, **53**, № 7 (1946). [2] Я. Н. Фельд, ДАН, **55**, № 5 (1947).

* Необходимо подчеркнуть, что соотношение (14) справедливо только при $\omega = \omega_1$, т. е. когда частота обоих полей одинакова.