Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVI, № 4

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

К. ТЕОДОРЧИК

СТАБИЛЬНОСТЬ ГАРМОНИЧЕСКИХ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

(Представлено академиком Б. А. Введенским 11 XI 1946)

На основании обобщенной теории регенерации [1] легко видеть, что во время установления скорость нарастания амплитуды автоколебаний пропорциональна произведению амплитуды на частоту и избыток значения действительного коэффициента усиления над единицей

$$\frac{da}{dt} \approx \omega a\,(\mu - 1). \tag{1}$$

Скорость же изменения частоты (фазы) пропорциональна сдвигу фаз выхода системы по отношению к входу

$$\frac{d\varphi}{dt} \approx \omega\psi. \tag{2}$$

Действительный коэффициент усиления и фазовый угол являются функциями амплитуды автоколебаний a, их частоты ω и параметров схемы. Обозначив любой из этих параметров буквой ε, мы для стационарного режима имеем:

$$\begin{gathered} \mu\,(a, \omega, \ldots, \varepsilon, \ldots) = 1, \\ \psi\,(a, \omega, \ldots, \varepsilon, \ldots) = 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Для заданного значения параметра ε_0 эти уравнения определяют стационарные значения амплитуды a_0 и частоты ω_0.

Если заданное значение параметра ε будет возмущено и получит значение

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + d\varepsilon, \tag{4}$$

то стационарные значения амплитуды и частоты также изменятся и установятся на новых значениях

$$a = a_0 + da, \qquad \omega = \omega_0 + d\omega. \tag{5}$$

Значения эти должны удовлетворять равенствам:

$$\begin{gathered} \mu\,(a_0 + da,\ \omega_0 + d\omega, \ldots, \varepsilon_0 + d\varepsilon, \ldots) = 1, \\ \psi\,(a_0 + da,\ \omega_0 + d\omega, \ldots, \varepsilon_0 + d\varepsilon, \ldots) = 0. \end{gathered} \tag{6}$$

Разложив эти выражения в ряды, воспользовавшись (3) и ограничившись членами первого порядка малости, получим:

$$\left(\frac{\partial\mu}{\partial a}\right)_0 da+\left(\frac{\partial\mu}{\partial\omega}\right)_0 d\omega+\left(\frac{\partial\mu}{\partial\varepsilon}\right)_0 d\varepsilon=0,$$
$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial a}\right)_0 da+\left(\frac{\partial\psi}{\partial\omega}\right)_0 d\omega+\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon}\right)_0 d\varepsilon=0. \tag{7}$$

Решая эту систему относительно da и $d\omega$, находим:

$$\frac{da}{d\varepsilon}=\frac{\begin{vmatrix}\left(\frac{\partial\mu}{\partial\omega}\right)_0 & \left(\frac{\partial\mu}{\partial\varepsilon}\right)_0\\ \left(\frac{\partial\psi}{\partial\omega}\right)_0 & \left(\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon}\right)_0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\left(\frac{\partial\mu}{\partial a}\right)_0 & \left(\frac{\partial\mu}{\partial\omega}\right)_0\\ \left(\frac{\partial\psi}{\partial a}\right)_0 & \left(\frac{\partial\psi}{\partial\omega}\right)_0\end{vmatrix}}, \tag{8}$$

$$\frac{d\omega}{d\varepsilon}=\frac{\begin{vmatrix}\left(\frac{\partial\mu}{\partial a}\right)_0 & \left(\frac{\partial\mu}{\partial\varepsilon}\right)_0\\ \left(\frac{\partial\psi}{\partial a}\right)_0 & \left(\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon}\right)_0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\left(\frac{\partial\mu}{\partial a}\right)_0 & \left(\frac{\partial\mu}{\partial\omega}\right)_0\\ \left(\frac{\partial\psi}{\partial a}\right)_0 & \left(\frac{\partial\psi}{\partial\omega}\right)_0\end{vmatrix}}. \tag{9}$$

Величины (8) и (9) дают выражения стабильности системы по амплитуде и частоте при изменении параметра ε.

Из этих выражений мы видим, что стабильность системы по отношению к любым изменениям параметров пропорциональна величине

$$\sigma=\begin{vmatrix}\left(\frac{\partial\mu}{\partial a}\right)_0 & \left(\frac{\partial\mu}{\partial\omega}\right)_0\\ \left(\frac{\partial\psi}{\partial a}\right)_0 & \left(\frac{\partial\psi}{\partial\omega}\right)_0\end{vmatrix}, \tag{10}$$

которую рационально поэтому назвать мерой абсолютной стабильности системы.

Если к системе, подчиняющейся уравнениям установления (1) и (2), применить формулы обоих признаков устойчивости ([2]), то мы получим: первый признак устойчивости

$$a\left(\frac{\partial\mu}{\partial a}\right)_0+\left(\frac{\partial\psi}{\partial\omega}\right)_0<0; \tag{11}$$

второй признак устойчивости

$$\begin{vmatrix}\left(\frac{\partial\mu}{\partial a}\right)_0 & \left(\frac{\partial\mu}{\partial\omega}\right)_0\\ \left(\frac{\partial\psi}{\partial a}\right)_0 & \left(\frac{\partial\psi}{\partial\omega}\right)_0\end{vmatrix}>0. \tag{12}$$

Сравнив эти признаки устойчивости с полученной нами мерой стабильности (10), мы видим, что стабильность рассматриваемого типа систем тем больше, чем дальше их режим работы от границы устойчивости рассматриваемого движения.

В генераторах почти гармонических колебаний $\left(\frac{\partial\psi}{\partial a}\right)_0$ в первом приближении равно нулю.

Кроме того, во всех генераторах, работающих на высокодобротных контурах, генерация происходит на частотах, весьма близких к резонансу. Вследствие этого величина $\left(\frac{\partial\mu}{\partial\omega}\right)_0$ в таких системах также весьма мала. Благодаря этому в системах такого рода второй признак устойчивости упрощается и принимает вид:

$$\left(\frac{\partial\mu}{\partial a}\right)_0 \left(\frac{\partial\psi}{\partial\omega}\right)_0 > 0. \tag{13}$$

В совокупности с (11) это приводит к следующему более простому виду условий устойчивости:

$$\left(\frac{\partial\mu}{\partial a}\right)_0 < 0, \qquad \left(\frac{\partial\psi}{\partial\omega}\right)_0 < 0. \tag{14}$$

Формулы абсолютной амплитудной и частотной стабильности (8) и (9) принимают в рассматриваемом случае также более простой вид:

$$\frac{da}{d\varepsilon} = \frac{\left(\frac{\partial\mu}{\partial\varepsilon}\right)_0}{-\left(\frac{\partial\mu}{\partial a}\right)_0}, \qquad \frac{d\omega}{d\varepsilon} = \frac{\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon}\right)_0}{-\left(\frac{\partial\psi}{\partial\omega}\right)_0}. \tag{15}$$

Эти формулы показывают, что для рассматриваемого класса систем вместо одной меры стабильности (10) рационально ввести две: меру абсолютной стабильности амплитуды

$$\sigma_a = -\left(\frac{\partial\mu}{\partial a}\right)_0, \tag{16}$$

и меру абсолютной стабильности частоты

$$\sigma_\omega = -\left(\frac{\partial\psi}{\partial\omega}\right)_0. \tag{17}$$

Обычно нас интересуют не абсолютные, а относительные меры стабильности, равные:

$$S_a = -a_0\left(\frac{\partial\mu}{\partial a}\right)_0, \quad S_\omega = -\omega_0\left(\frac{\partial\psi}{\partial\omega}\right)_0. \tag{18}$$

Последняя величина совпадает с формулой Сифорова ([3]).

Научно-исследовательский институт физики
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
11 XI 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] К. Теодорчик, ДАН, **49**, № 4, 265 (1945); **52**, № 1, 33 (1946). [2] К. Теодорчик, Автоколебательные системы, 1944, § 18. [3] В. И. Сифоров, Изв. электропромышленности слаб. тока, № 10, 4 (1940).