Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVI, № 4

ФИЗИКА

АСЕН ДАЦЕВ

ОБ ОХЛАЖДЕНИИ СТЕРЖНЯ, СОСТАВЛЕННОГО ИЗ КОНЕЧНОГО ЧИСЛА ОДНОРОДНЫХ ЧАСТЕЙ

(Представлено академиком С. И. Вавиловым 27 II 1947)

Настоящая работа является следующим обобщением задачи теплопроводности, которую мы рассмотрели в двух предыдущих работах ([1], [2]).

Рассмотрим стержень A незначительной толщины, составленный из n однородных частей A_i длиной l_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ каждая. Стержень A расположен по оси OX, от O_0 до O_n, а часть A_i — от O_{i-1} до O_i $(l_i=x_i-x_{i-1})$. Температура $u_i(x, t)$ $(x_{i-1}<x<x_i,\ t>0)$ части A_i будет удовлетворять уравнению теплопроводности

$$a_i^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}=\frac{\partial u_i}{\partial t}, \tag{1}$$

где $a_i^2=k_i/\rho_i\sigma_i$. Начальная температура $u_i(x, 0)$ стержня A_i дана функцией $\Phi_i(x)$

$$u_i(x, 0)=\Phi_i(x) \quad (x_{i-1}<x<x_i). \tag{2}$$

На концах O_0 и O_n стержня A даны температуры как функции t $\varphi_0(t)$ и $\varphi_n(t)$ $(t>0)$.

$$u_1(x_0, t)=\varphi_0(t), \quad u_n(x_n, t)=\varphi_n(t). \tag{3}$$

В точках $O_1, \ldots, O_{n-1}$ будем иметь, как известно, условия

$$u_i=u_{i+1}, \tag{4}$$

$$k_i \frac{\partial u_i}{\partial x}=k_{i+1}\frac{\partial u_{i+1}}{\partial x}, \tag{4'}$$

$$(x=x_i,\ t>0)$$

Нужно найти функции $u_i(x, t)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, удовлетворяющие уравнению (1), начальным условиям (2), условиям (4) и (4') в точках $O_1, \ldots, O_{n-1}$, а функции u_1 и u_n — условиям на границе (3).

Обозначим через $\varphi_i(t)$ $(t>0,\ i=1, \ldots, n-1)$ температуру точки O_i, т. е. $\varphi_i(t)=u_i(x_i, t)=u_{i+1}(x_i, t)$. Тогда функция $u_i(x, t)$, имея начальное значение $\Phi_i(x)$ и граничные значения φ_{i-1} и φ_i, представится в виде ((3), стр. 357)

$$u_i(x, t)=V_i(x, t)+W_i(x, t), \tag{5}$$

где

$$V_i(x, t) = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \Gamma_i(x, \xi, t)\, \Phi_i(\xi)\, d\xi, \tag{6}$$

$$\Gamma_i(x, \xi, t) = \frac{1}{2l_i}\left\{ \vartheta_3\left(\frac{x - x_{i-1} - \xi}{2l_i}, \frac{a_i^2 t}{l_i^2}\right) - \vartheta_3\left(\frac{x - x_{i-1} + \xi}{2l_i}, \frac{a_i^2 t}{l_i^2}\right)\right\}, \tag{6'}$$

а ϑ_3 есть тета-функция ((3), стр. 144):

$$\vartheta_3(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-(x+\nu)^2/t} = 1 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} \cos 2\pi\nu x e^{-\pi^2\nu^2 t}. \tag{7}$$

W_i дано выражением $(x_{i-1} < x < x_i)$:

$$W_i(x, t) = -\frac{a_i^2}{l_i}\varphi_{i-1}(t) * \frac{\partial\vartheta_3}{\partial x}\left(\frac{x - x_i}{2l_i}, \frac{a_i^2 t}{l_i^2}\right) +$$

$$+ \frac{a_i^2}{l_i}\varphi_i(t) * \frac{\partial\vartheta_3}{\partial x}\left(\frac{x_i - x}{2l_i}, \frac{a_i^2 t}{l_i^2}\right), \tag{8}$$

где звездочка $*$ означает

$$\varphi(t) * \psi(t) = \int\limits_0^t \varphi(\tau)\,\psi(t - \tau)\, d\tau. \tag{8'}$$

Функции u_i удовлетворяют (4), как это видно при их составлении. Чтобы выполнить условие (4'), дифференцируем (5) по x:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = P_i(x, t) + Q_i(x, t) = \frac{\partial V_i}{\partial x} + \frac{\partial W_i}{\partial x}. \tag{9}$$

Q_i становится неопределенным для $x = x_i$. Во избежание этой трудности заменим условие (4') другим, — следствием из (4'), интегрируя (4') по t от 0 до t:

$$k_i \int\limits_0^t \frac{\partial u_i}{\partial x}\, d\tau = k_{i+1} \int\limits_0^t \frac{\partial u_{i+1}}{\partial x}\, d\tau. \tag{4''}$$

Исходя из (9), представим левую часть (4''), для фиксированного x $(x_{i-1} < x < x_i)$, в виде

$$k_i\bar{P}_i + k_i\bar{Q}_i, \tag{10}$$

где $\bar{P}_i$ на основании (9) и (6) можно выразить:

$$\bar{P}_i(x, t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\partial\Gamma_i}{\partial x}\,\Phi_i(\xi)\, d\xi. \tag{11}$$

Принимая во внимание, что ϑ_3 удовлетворяет уравнению (1), посредством (9) и (8) получим для $\bar{Q}_i$:

$$\bar{Q}_i(x, t) = \bar{q}^{\,i}_{i-1} + \bar{q}^{\,i}_i, \tag{12}$$

$$\bar{q}^{\,i}_s(x, t) = -\frac{\delta}{l_i}\int\limits_0^t \varphi_s(\tau)\,\vartheta_3\left[\frac{\delta(x - x_s)}{2l_i}, \frac{a_i^2(t - \tau)}{l_i^2}\right] d\tau,$$

где $s = i - 1,\ i$, а $\delta = 1$, когда $s = i - 1$, и $\delta = -1$, когда $s = i$.

Приравниваем два выражения (10), составленные для стержней A_i и A_{i+1}, используя $\overline{P}_i$ (11) и $\overline{Q}_i$ (12) $(x = x_i)$. Таким образом, получим для определения φ_i $(i = 1, \ldots, n-1)$ систему интегральных уравнений Вольтерра первого рода

$$\int_0^t \sum_{s=i-1}^{i+1} \varphi_s(\tau) \frac{M_{s,i}(t,\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau = f_i^{i+1}(x_i, t), \tag{13}$$

где

$$f_i^{i+1}(x_i, t) = k_{i+1}\overline{P}_{i+1}(x_i, t) - k_i \overline{P}_i(x_i, t), \tag{14}$$

$$M_{s,i}(t,\tau) = -\frac{k_s}{a_s\sqrt{\pi}} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{l_s^2(1+2\nu)^2}{4a_s^2(t-\tau)}} \quad (s = i-1, i+1), \tag{15}$$

$$M_{i,i}(t,\tau) = A_i^{i+1} + \frac{k_i}{a_i\sqrt{\pi}} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty}{}' e^{-\frac{l_i^2\nu^2}{a_i^2(t-\tau)}} + \frac{k_{i+1}}{a_{i+1}\sqrt{\pi}} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty}{}' e^{-\frac{l_{i+1}^2\nu^2}{a_{i+1}^2(t-\tau)}}, \tag{16}$$

$$A_i^{i+1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{k_i}{a_i} + \frac{k_{i+1}}{a_{i+1}}\right).$$

В суммах (16) $\nu \neq 0$, почему $M_{i,i}(t,t) = A_i^{i+1}$, а $M_{s,i}(t,t) = 0$.

Теперь заменим в (13) t через T, умножим обе части (13) на $(t-T)^{-1/2}$ и интегрируем по T от 0 до t. Потом переменим порядок интегрирования и дифференцируем обе части уравнения по t. Вне интеграла получится член $A_i^{i+1}\pi\varphi_i(t)$. Разделив обе части уравнения на πA_i^{i+1}, получим вместо (13)

$$\varphi_i(t) + \int_0^t \sum_{s=i-1}^{i+1} \varphi_s(\tau) K_{s,i}(t,\tau)\, d\tau = F_i^{i+1}(x_i, t), \tag{17}$$

где

$$F_i^{i+1}(x_i, t) = \frac{1}{\pi A_i^{i+1}} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{f_i^{i+1}(x_i, T)\, dT}{\sqrt{(t-T)(T-\tau)}}, \tag{18}$$

$$K_{s,i}(t,\tau) = \frac{1}{\pi A_i^{i+1}} \frac{\partial}{\partial t} \int_\tau^t \frac{M_{s,i}(T,\tau)\, dT}{\sqrt{(t-T)(T-\tau)}}. \tag{19}$$

(17) представляет систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода для неизвестных функций $\varphi_i(t)$. Так как ядра $K_{s,i}$ и F_i^{i+1} непрерывны, (17), как известно, имеет решения. Подставляя найденные функции φ_i в (8), получим все искомые функции $u_i(x, t)$ (5) и, таким образом, поставленная задача решена.

Стационарное состояние. Рассмотрим случай, когда температуры на концах $\varphi_0 = C_0$ и $\varphi_n = C_n$ постоянны. Легко получается для $t \to \infty$ из (7) $\vartheta_3 \to 1$, из (14) $f_i^{i+1} \to 0$, а ядра в (13) стремятся к постоянным значениям. В этом случае (13) удовлетворяется постоянными значениями C_i, к которым стремятся φ_i. Таким образом получаем, что для $t \to \infty$ систему (13) можно заменить линейной неоднородной системой

$$-m_i C_{i-1} + (m_i + m_{i+1}) C_i - m_{i+1} C_{i+1} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n-1), \tag{20}$$

где $m_i = k_i / l_i$, а C_0 и C_n — данные величины. Для детерминанта системы получаем $\Delta = m_1 m_2 \ldots m_n \sum_{\varepsilon=1}^{n} \frac{1}{m_\varepsilon}$, а для постоянных C_i

$$C_i = \left(C_0 \sum_{i+1}^{n} \frac{l_\varepsilon}{k_\varepsilon} + C_n \sum_{1}^{i} \frac{l_\varepsilon}{k_\varepsilon} \right) : \sum_{1}^{n} \frac{l_\varepsilon}{k_\varepsilon}. \tag{21}$$

Замещая $\varphi_i = C_i$ в (8) и имея в виду второе выражение (7) для ϑ_3, получаем, что оба члена W_i (8) стремятся к рядам, представляющим разложения линейных функций в ряды Фурье. Используя (21), окончательно имеем

$$W_i = \alpha_i x + \beta_i, \tag{22}$$

$$\alpha_i = (-C_0 + C_n) : k_i \sum_{1}^{n} \frac{l_\varepsilon}{k_\varepsilon}, \tag{22'}$$

$$\beta_i = \left\{ C_0 \left[\frac{x_i}{k_i} + \sum_{i+1}^{n} \frac{l_\varepsilon}{k_\varepsilon} \right] + C_n \left[\sum_{1}^{i-1} \frac{l_\varepsilon}{k_\varepsilon} - \frac{x_{i-1}}{k_i} \right] \right\} : \sum_{1}^{n} \frac{l_\varepsilon}{k_\varepsilon}. \tag{22''}$$

Задача распространения тепла в многослойном теле (в стационарном состоянии) разработана Gröber'ом ([4]) при данных C_n и $C_0 = 0$. Если в (22') и (22'') положим $C_0 = 0$, мы получаем, как частный случай, что (22') и (22'') совпадают с формулами (23) из ([5]).

В общем случае, для нестационарного состояния, легко получить из формул (17) случай $l_n \to \infty$ (или $l_1 \to \infty$) и случай $l_1 \to \infty$, $l_n \to \infty$. Получаем систему уравнений вида (17).

Таким же образом решается задача, когда в O_0 вместо температуры дано излучение (пропорциональное $\partial u / \partial x$). Тогда u_1 представится формулой, аналогичной (5), но вместо ϑ_3 фигурирует тета-функция ϑ_2 (([3]), стр. 361). В результате мы приходим опять к системе интегральных уравнений вида (17) для $\varphi_i(t)$. Частный случай $l_n \to \infty$ получается легко. Таким же образом решается и задача, когда в концах O_0 и O_n даны излучения.

Поступило
26 II 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Дацев, ДАН, 55, № 2 (1947). [2] А. Дацев, ДАН, 56, № 3 (1947). [3] G. Doetsch, Die Laplace Transformation, Berlin, 1937. [4] H. Gröber, Die Grundgesetze der Wärmeleitung, Berlin, 1921. [5] Frank-Mises, Die Differentialgl. der Physik, 2, 1927.