Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVI, № 4

АЭРОДИНАМИКА

И. И. ЭТЕРМАН

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ ПО ЗАДАННОМУ РАСПРЕДЕЛЕНИЮ ДАВЛЕНИЯ

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 12 XI 1946)

Проблема выбора наиболее совершенных форм частей самолета с неизбежностью приводит нас к задаче определения поверхности тела по заданному распределению давления или, что то же, распределению скоростей.

В предлагаемой работе дается эффективный метод решения этой задачи для тел вращения, опирающийся на гибкий аппарат шаровых функций.

Пусть на отрезке $(L, -L)$ оси x задано распределение скоростей V_σ по поверхности некоторого искомого тела вращения A с осью симметрии, направленной вдоль оси x, и со скоростью V_∞ на бесконечности, которую мы дальше для удобства примем за единицу. Выберем ось y перпендикулярно оси x и введем эллиптические координаты η, θ соотношениями:

$$x = \operatorname{ch}\eta \cos\theta,$$
$$y = \operatorname{sh}\eta \sin\theta. \tag{1}$$

Заметим, что заданное распределение скоростей не может быть произвольным, если мы хотим, чтобы поверхность тела A была замкнутой. Для этого вдоль контура тела должно выполняться следующее условие:

$$\oint \frac{d\varphi}{V_\sigma} = C; \tag{2}$$

здесь φ — потенциал обтекания A, C — длина контура тела A.

Формы фюзеляжей современных самолетов весьма близки к эллипсоидальным. Поэтому запишем уравнение образующей искомого тела A, выделив в нем главную часть:

$$\eta = \eta_0 + \delta\eta(\theta), \tag{3}$$

где η_0 — „номер“ эллипсоида, который близок к A. Его уравнение имеет вид:

$$\eta = \eta_0. \tag{4}$$

Уравнение для $\delta\eta(\theta)$ находится из следующих соображений. На теле вращения A выполняется граничное условие

$$\frac{d\varphi}{d\sigma} = V_\sigma, \tag{5}$$

которое показывает, что скорость частички, движущейся по образующей тела A, направлена по касательной к телу ($d\sigma$ — элемент дуги образующей).

Представим φ в виде:

$$\varphi = \overline{\varphi} + \delta\varphi \tag{6}$$

и заменим граничное условие (5), выполняющееся на контуре, подлежащем определению, эквивалентным ему с точностью до малых порядка $\delta\eta$ условием на эллипсоиде $\eta = \eta_0$.

Таким образом, мы заменим уравнение (5) следующим основным уравнением:

$$\Lambda(\xi) = (\alpha_0^2 - \xi^2)\frac{d\delta\varphi(\eta_0)}{d\xi} + F(\eta_0)(\alpha_0^2 - \xi^2) + \lambda_0\delta\eta, \tag{7}$$

где

$$\Lambda(\xi) = \frac{(\alpha_0^2 - \xi^2)^{3/2}}{\sin\theta} V_\sigma,$$

$$F(\eta_0) = \alpha_0 - kQ_1(\alpha_0),$$

$$\lambda_0 = -\operatorname{sh}\eta_0 \operatorname{ch}\eta_0 F(\eta_0).$$

Для решения основного уравнения (7) представим искомую функцию $\delta\eta(\theta)$ рядом Лежандра:

$$\delta\eta(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\xi) \tag{8}$$

и сведем задачу нахождения коэффициентов этого ряда к задаче решения бесконечной линейной системы уравнений относительно a_n.

Заданную функцию $\Lambda(\xi)$ раскладываем в ряд Лежандра:

$$\Lambda(\xi) = \sum b_n P_n(\xi). \tag{9}$$

В работе ([1]) нами показано, что поправочный потенциал представим рядом по шаровым функциям, который в случае тел вращения принимает вид:

$$\delta\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\xi) Q_n(\alpha). \tag{10}$$

Коэффициенты определяются из условия ортогональности систем функций Лежандра:

$$A_n = \frac{2n+1}{2}\frac{F(\eta_0)}{Q_n'(\alpha_0)}\int_{-1}^{+1}\frac{dP_n}{d\xi}(\xi^2 - 1)\delta\eta(\theta)\,d\xi; \tag{11}$$

$Q_n^m(\alpha)$ — присоединенная функция Лежандра второго рода.

Используя основные свойства функций Лежандра, получим:

$$A_n = \frac{n(n+1)F(\eta_0)}{Q_n'(\alpha_0)}\left[\frac{a_{n+1}}{2n+3} - \frac{a_{n-1}}{2n-1}\right], \tag{12}$$

$$F(\eta_0)(\alpha_0^2 - \xi^2) = F(\eta_0)\left(\alpha_0^2 - \frac{1}{3}\right)P_0(\xi) - \frac{2}{3}F(\eta_0)P_2(\xi). \tag{13}$$

На основе равенств (8) — (12) придаем уравнению (7) следующий вид:

$$\sum_{n=0} (b_n - \lambda_0 a_n) P_n(\xi) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{n(n+1)}{2n+1} (P_{n+1} - P_{n-1}) =$$

$$= F(\eta_0) \left(\alpha_0{}^2 - \frac{1}{3}\right) P_0(\xi) - \frac{2}{3} F(\eta_0) P_2(\xi) + (\alpha_0{}^2 - 1) \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{dP_n}{d\xi}. \quad (14)$$

В этом уравнении неизвестны лишь коэффициенты $a_0, \ldots, a_n$. Выражая производные функций Лежандра через комбинации функций Лежандра, заменим уравнение (14) бесконечной системой линейных уравнений для коэффициентов $a_0, \ldots, a_n$.

Естественно, что для практических расчетов приходится из этой бесконечной системы выделять конечное число уравнений. Расчеты показывают достаточность 5 уравнений с неизвестными a_0, a_1, a_2, a_3, a_4.

К большому удобству для вычислений эта система распадается на две, независимых друг от друга: четную и нечетную.

Филиал
Центрального аэро-гидродинамического института
им. Н. Е. Жуковского,
г. Новосибирск

Поступило
12 XI 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ф. Франкль и И. Этерман, Прикладн. мат. и мех., 8 (1944).