Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVI, № 4

МАТЕМАТИКА

А. М. ЯГЛОМ

ЭРГОДИЧЕСКИЙ ПРИНЦИП ДЛЯ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ, ИМЕЮЩИХ СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 17 I 1947)

Основные определения и обозначения общей теории марковских (стохастически определенных) случайных процессов см. ([1]), § 1. Здесь мы будем рассматривать лишь однородные во времени процессы, т. е. будем считать, что вероятность перехода $P(t_0, x, t_1, \mathcal{E}) = P(t_1 - t_0, x, \mathcal{E})$.

Нормальная функция распределения $W(\mathcal{E})$ называется **стационарной для данного марковского процесса**, если

$$W(\mathcal{E}) = \int_{\mathfrak{A}_x} P(t, x, \mathcal{E})\, W(d\mathfrak{A}).$$

Стационарное распределение $W(\mathcal{E})$ называется **предельным** (или **эргодическим**), если при любом начальном распределении $Q(t_0, \mathcal{E})$ и $t_1 \to \infty$

$$Q(t_1, \mathcal{E}) \to W(\mathcal{E})$$

для каждого $\mathcal{E} \subset \mathfrak{F}$. Здесь

$$Q(t_1, \mathcal{E}) = \int_{\mathfrak{A}_x} P(t_1 - t_0, x, \mathcal{E})\, Q(t_0, d\mathfrak{A})$$

есть функция распределения для момента времени t_1, соответствующая распределению $Q(t_0, \mathcal{E})$ для момента t_0.

Про марковский процесс, имеющий предельное стационарное распределение, говорят, что он **подчинен эргодическому принципу** (ср. ([1]), § 4). Очевидно, что в этом случае стационарное распределение всегда единственно.

Для случая марковских процессов с дискретным временем и конечным числом возможных состояний еще Марковым было доказано, что если только все вероятности перехода положительны, то эргодический принцип имеет место (см., например, ([2]), § 6).

В дальнейшем доказательство Маркова было перенесено на случай марковских процессов с компактным пространством состояний, имеющих всюду положительную плотность вероятности перехода (([2]), § 36; ([3]), § 5).

В настоящее время детально изучены эргодические свойства широкого класса марковских процессов с компактным пространством состояний ([4]).

Однако требование компактности пространства состояний часто оказывается весьма стеснительным при изучении конкретных физических процессов (отметим, например, что это требование заведомо не выполняется для встречающихся в теории брауновского движения марковских процессов в фазовом пространстве физической системы).

В связи с этим представляют интерес те случаи, когда выполнение эргодического принципа может быть доказано без привлечения этого требования.

Мы здесь рассмотрим случай марковских процессов, имеющих стационарное распределение $W(\mathscr{E})$. Относительно вероятности перехода $P(t, x, \mathscr{E})$ мы предположим, что как функция множества $\mathscr{E}$ она при любых t и x абсолютно непрерывна относительно $W(\mathscr{E})$, т. е. может быть представлена в виде

$$P(t, x, \mathscr{E}) = \int\limits_{\mathscr{E}, \mathfrak{A}_y} p(t, x, y)\, W(d\mathfrak{A}),$$

где значок $\mathscr{E}$ в правой части означает, что интеграл распространен по множеству $\mathscr{E}$; функция $p(t, x, y)$ есть плотность вероятности перехода (относительно меры $W(\mathscr{E})$).

В этом случае вопрос о выполнимости эргодического принципа часто может быть решен при помощи следующей теоремы:

Теорема 1. *Марковский процесс, имеющий стационарное распределение $W(\mathscr{E})$ и обладающий непрерывной по x и по y относительно $W(\mathscr{E})$ всюду положительной плотностью вероятности перехода $p(t, x, y)$, всегда подчинен эргодическому принципу.*

При доказательстве этой теоремы можно рассматривать только абсолютно непрерывные относительно $W(\mathscr{E})$ функции распределения $Q(t, \mathscr{E})$; в таком случае

$$Q(t, \mathscr{E}) = \int\limits_{\mathscr{E}, \mathfrak{A}_x} q(t, x)\, W(d\mathfrak{A}),$$

и при $t_1 > t_0$

$$q(t_1, x) = \int\limits_{\mathfrak{A}_x} p(t_1 - t_0, x, y)\, q(t_0, x)\, W(d\mathfrak{A});$$

$q(t, x)$ есть плотность распределения вероятностей для момента времени t.

Далее можно воспользоваться принятым в статистической физике методом обоснования эволюционных теорем при помощи доказательства монотонности некоторого функционала относительно плотности распределения вероятностей. Ряд примеров таких доказательств собран в работе А. Я. Хинчина ([5]), где дан также очень изящный общий метод получения подобных результатов.

Метод Хинчина может быть использован для доказательства следующей теоремы, по формулировке аналогичной знаменитой H-теореме Больцмана кинетической теории газов.

Теорема 2. *Пусть $W(\mathscr{E})$ есть стационарное распределение для марковского процесса с всюду отличной от нуля плотностью вероятности перехода и $q(t, x)$ есть плотность распределения вероятностей для момента времени t.*

Рассмотрим функционал

$$H_{\Phi}\{q(t, x)\} = \int\limits_{\mathfrak{A}_x} \Phi(q(t, x))\, W(d\mathfrak{A}),$$

где $\Phi(\xi)$ — *произвольная строго выпуклая на интервале* $0 \leqslant \xi < \infty$ *функция.*

В таком случае $H_\Phi\{q(t,x)\}$ *принимает наименьшее значение при* $q(t,x)=1$, *и если* $H_\Phi\{q(t_0,x)\}$ *конечно, то для* $t_1 > t_0$

$$H_\Phi\{q(t_1,x)\} \leqslant H_\Phi\{q(t_0,x)\},$$

где равенство имеет место лишь при $q(t_1,x)=q(t_0,x)=1$.

Из этой теоремы может быть выведена сформулированная выше теорема 1.

Поступило
17 I 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Kolmogoroff, Math. Ann., **104**, 415 (1931). [2] B. Hostinsky, Méthodes générales du Calcul des Probabilités, Paris, 1931. [3] A. Kolmogoroff, Math. Ann., **108**, 149 (1933). [4] М. Бебутов, Математ. сб., **10** (52), 213 (1942). [5] А. Хинчин, Изв. АН СССР, сер. математ., **7**, 111 (1943).