Доклады Академии Наук СССР
1947, Том LVI, № 4

МАТЕМАТИКА

Л. Я. НЕЙШУЛЕР

О ПОСТРОЕНИИ k-ЧЛЕННЫХ ТАБЛИЦ (1) ДЛЯ ФУНКЦИЙ n ($n \geqslant 3$) ПЕРЕМЕННЫХ С МИНИМАЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ВХОДОВ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 17 XI 1946)

В статьях (1,2) мы показали, что для некоторых классов функций трех, четырех, пяти и шести переменных возможны табличные конструкции, обладающие высокой степенью табулируемости и дающие искомые значения при помощи, соответственно, трех, четырех, пяти и шести входов, т. е. при помощи минимально возможного числа входов (равного числу аргументов). Эти конструкции будем в дальнейшем называть, соответственно, конструкции $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ и $\mathfrak{d}$.

Все три входа в $\mathfrak{a}$ и четыре входа в $\mathfrak{b}$ располагаются на плоскости. Будем их называть двухмерными. Конструкции $\mathfrak{c}$ и $\mathfrak{d}$ являются уже трехмерными.

При табулировании функций большего (чем шесть) числа переменных мы можем приемом „расчленения", которым мы пользовались в статье (3), свести табулирование k-членно табулируемой функции к табулированию функций меньшей k-членности ($k \leqslant 6$), совокупность таблиц для которых дает возможность, пользуясь ими в определенной последовательности, находить значения искомой функции. Число входов при этом (для рассматриваемых конструкций), естественно, увеличивается и уже будет всегда больше числа аргументов.

В настоящей заметке мы рассмотрим конструкции таблиц для некоторых классов функций произвольного числа переменных, содержащих минимально возможное число входов.

Лемма 1. *Для функции n ($n \geqslant 3$) переменных невозможно построение k-членной таблицы, где $k < n-1$, т. е. невозможно построение таблицы, основанной на представлении ее в виде суперпозиции меньшего, чем $n-1$, числа функций двух переменных.*

Это легко можно показать методом неопределенного спуска.

Минимально возможное число входов k-членной таблицы есть, очевидно, возрастающая функция k. Отсюда следует, что конструкция k-членной таблицы для функции n переменных с минимальным числом входов возможна лишь в случае, когда $k = n-1$.

$(n-1)$-членная таблица для функции n переменных может быть построена на основе представлений следующих трех видов:

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_{n-1}(\ldots(f_3(f_2(f_1(x_{i_1}, x_{i_2}), x_{i_3}), x_{i_4})\ldots), x_{i_n}), \quad \text{(I)}$$

в котором аргументы „наслаиваются" по одному;

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}) =$$
$$= f_{2n-1}(\ldots f_5(f_3(f_1(x_{i_1}, x_{i_2}), f_2(x_{i_3}, x_{i_4})\ldots) f_{2n-2}(x_{i_{2n-1}}, x_{i_{2n}}), \quad \text{(II)}$$

($i_1, i_2, \ldots, i_n$ — какая-нибудь перестановка индексов $1, 2, \ldots, 2n$), в котором аргументы наслаиваются парами, и

(III) — смешанный.

Системы дифференциальных уравнений в частных производных, представляющие необходимые и достаточные условия существования представлений этих трех видов для $(n-1)$-членно габулируемой функции n переменных, легко получить, так как аргументы в этом случае (во всех трех видах) встречаются по одному разу.

Так, например, системой уравнений, представляющей необходимое и достаточное условие существования представления (II), будет, как легко убедиться, следующая:

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_r}}\left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_{2m-1}}} : \frac{\partial f}{\partial x_{i_{2m}}}\right) = 0$$

$$(m = 1, 2, 3 \ldots n;\ r \neq 2m - 1 \text{ и } r \neq 2m).$$

Практически, однако, при k-членном табулировании тех или иных расчетных формул, содержащих несколько параметров, обычно нет необходимости пользоваться этими условиями, так как возможность „расщепления" функции нескольких переменных на функции двух переменных видна непосредственно.

Будем говорить, что данная функция n переменных разрешима в тех или иных табличных конструкциях, если можно построить комплекс таблиц (в частности одну) этих конструкций, пользование которыми в определенной последовательности дает возможность находить значения нашей функции.

Теорема. *Любая $(n-1)$-членно табулируемая функция n переменных $(n \geqslant 3)$ разрешима в двух-трехмерных табличных конструкциях* a, b, c *и* d.

Если ограничиться $(n-1)$-членно табулируемыми функциями n переменных только вида (I) и (II), то можно показать, что они всегда разрешимы и только в двухмерных конструкциях a и b.

Все это можно показать приемом „расчленения", которым мы пользовались в статье ([3]), и методом математической индукции.

Функции же смешанного вида (III), как легко убедиться, не всегда разрешаются в двухмерных конструкциях a и b *, но всегда разрешаются в конструкциях a, b, c и d.

Из самого процесса „расчленения", которым мы пользовались в лемме 2 статьи ([3]), видно, что если допускать только двухмерные конструкции a и b, то применение его к табулированию $(n-1)$-членно табулируемой функции n переменных вида (I) приведет к конструкции, содержащей минимальное число входов. Оно будет равно $n - 1 + \mathrm{E}\frac{n+1}{3}$.

Об эффективности таких конструкций можно судить по следующему примеру.

Соответствующая табличная конструкция для функции 12 переменных вида (I) будет содержать 15 входов, т. е. всего на три входа больше, чем обычная прямая „12-мерная", в то время как степень табулируемости ее будет выражаться астрономическими числами.

Легко убедиться, что для функции (II) (при том же условии — допущении только двухмерных конструкций) минимально возможное количество входов будет равно $2n - 1 + \mathrm{E}\frac{2n+1}{3}$, т. е. такое же, как и для функции вида (I), но число переменных всегда четное. Если же при табулировании функций вида (I) и (II) допускать и

* В качестве примера достаточно привести функцию пяти переменных вида $u = f_4\{f_3[f_1(x_1, x_2), f_2(x_3, x_4)], x_5\}$.

трехмерные конструкции c и d, то минимально возможное количество входов в соответствующих табличных конструкциях, естественно, уменьшится. Оно будет равно $m-1+\mathrm{E}\frac{m+3}{5}$, где m — количество переменных.

Таким же оно будет и для функций вида (III).

Таблицу функции n переменных $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будем называть обратимой, если она дает возможность решать уравнение $u-f=0$ относительно любого из переменных $u, x_1, x_2, \ldots, x_n$ с помощью одного и того же количества входов.

Можно показать, что все рассмотренные в настоящей заметке табличные конструкции функций n переменных обратимы.

В качестве примера рассмотрим функцию n переменных $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, представляющую сумму произведений функций, каждая от одного переменного, следующего вида:

$$u=f_1 f_2 \ldots f_n+\varphi_i f_{i_1} f_{i_2} \ldots f_{i_{n-2}}+\varphi_{i_1} f_{i_2} f_{i_3} \ldots f_{i_{n-2}}+$$
$$+\varphi_{i_2} f_{i_3} f_{i_4} \ldots f_{i_{n-2}}+\ldots+\varphi_{i_{n-3}} f_{i_{n-2}}+\varphi_{i_{n-2}}, \qquad \text{(IV)}$$

где f_k и φ_s — функции одного переменного, соответственно, x_k и x_s, $i=1,2,\ldots,n$; система индексов $i_1, i_2, \ldots, i_{n-2}$ представляет собой какое-нибудь сочетание из $n-2$ индексов, взятых из последовательности $n-1$ индексов $1,2,\ldots,i-1, i+1,\ldots,n$.

Можно показать, что сумма (IV) допускает построение $(n-1)$-членной таблицы вида (I) и не допускает построения $(n-1)$-членной таблицы, основанной на представлениях вида (II) и (III). То же, очевидно, имеет место и для любой функции от этой суммы.

Ее $n-1$ компоненты $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$ имеют вид:

1) $k_1=f_p f_i \quad \varphi_i$ (p тот из $n-1$ индексов $1,2,\ldots, i-1, i+1,\ldots,n$, который не участвует во втором члене суммы (IV));

2) $k_2=k_1 f_{i_1}+\varphi_{i_1}$;

3) $k_3=k_2 f_{i_2}+\varphi_{i_2}$;

$n-1$) $k_{n-1}=k_{n-2} f_{i_{n-2}}+\varphi_{i_{n-2}}$.

В заключение опишем конструкцию таблицы для функции девяти переменных $x_1, x_2, \ldots, x_9$, представляющую сумму вида

$$u=f_1 f_2 \ldots f_9+\varphi_1 f_2 f_3 \ldots f_8+\varphi_2 f_3 f_4 \ldots f_8+\ldots \varphi_6 f_7 f_8+\varphi_7 f_8+\varphi_8. \qquad \text{(V)}$$

На основании изложенного она будет состоять из следующих трех двухмерных таблиц.

1) Таблицы с четырьмя входами вида А (см. ([2])) для функции четырех переменных x_1, x_3, x_9 и u_1

$$x_2=F_1[\psi_1(x_1, x_9), \eta_1(x_3, u_1)], \qquad \text{(VI)}$$

где

$$\psi_1(x_1, x_9)=f_9(x_9) f_1(x_1)+\varphi_1(x_1), \quad \eta_1(x_3, u_1)=\frac{u_1-\varphi_3(x_3)}{f_3(x_3)},$$

$$u_1=f_3(x_3)\{f_2(x_2)[f_9(x_9) f_1(x_1)+\varphi_1(x_1)]+\varphi_2(x_2)\}+\varphi_3(x_3) \qquad \text{(VII)}$$

и (VI) равносильно (VII), по которой мы найдем u_1.

2) Таблицы с четырьмя входами также вида А для функции четырех переменных u_1, x_4, x_6 и u_2

$$x_5=F_2[\psi_2(u_1, x_4), \eta_2(x_6, u_2)], \qquad \text{(VIII)}$$

где

$$\psi_2(u_1, x_4) = u_1 f_4(x_4) + \varphi_4(x_4), \qquad \eta_2(x_6, u_2) = \frac{u_2 - \varphi_6(x_6)}{f_6(x_6)},$$

$$u_2 = f_6(x_6)\left\{f_5(x_5)\left[u_1 f_4(x_4) + \varphi_4(x_4)\right] + \varphi_5(x_5)\right\} + \varphi_6(x_6), \qquad \text{(IX)}$$

и (VIII) равносильно (IX), по которой найдем u_2.

3) Таблицы с тремя входами (см. схему А, [1], стр. 136) для функции трех переменных u_2, x_7 и x_8

$$u = [u_2 f_7(x_7) + \varphi_7(x_7)]\, f_8(x_8) + \varphi_8(x_8).$$

Всего, таким образом, таблица для функции вида (V) будет содержать 11 входов — на 2 больше, чем число аргументов.

Укажем, наконец, что

1) если в сумме (IV) один или несколько членов заменить другим — другими —, то, протабулировав дополнительно разность между соответствующими членами суммы (IV) и измененными, мы суммированием найдем значение искомой (измененной) суммы;

2) рассмотренные здесь конструкции таблиц могут быть оформлены графически.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР

Поступило
17 XI 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Я. Нейшулер, ДАН, **36**, № 4—5 (1942). [2] Л. Я. Нейшулер, ДАН, **43**, № 4 (1944). [3] Л. Я. Нейшулер, ДАН, **55**, № 3 (1947).