Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVI, № 4

МАТЕМАТИКА

Я. М. КАЖДАН

ПРИМЕР ОТКРЫТОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ОДНОМЕРНОГО ЛОКАЛЬНО-СВЯЗНОГО КОНТИНУУМА НА КВАДРАТ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 3 III 1947)

В предлагаемой работе * будет построен пример открытого отображения одномерного локально-связного континуума на квадрат (см. ([1],[2]).

I. Напомним сначала построение известной кривой Серпинского ([3]). Квадрат K_1^0 с границей F_1^0 („квадрат нулевого ранга") делим на 9 равных квадратов. Внутренность среднего квадрата удаляем. Его границу B_1^0 назовем смежным контуром нулевого ранга. Оставшиеся 8 квадратов назовем квадратами 1-го ранга, а отрезки t_{1j}^0, являющиеся их сторонами, но не принадлежащие F_1^0 и B_1^0,— отрезками нулевого ранга.

Пусть построены квадраты n-го ранга R_k^n с границами F_k^n. Каждый из них делим на 9 равных квадратов. Удалим в каждом из них внутреннсстъ среднего квадрата. Его границу B_k^n назовем смежным контуром n-го ранга. Оставшиеся 8 квадратов назовем квадратами $n+1$-го ранга, а отрезки t_k^n, являющиеся их сторонами, но не принадлежащие ни F_k^n, ни B_k^n, назовем отрезками n-го ранга.

Полученное в пределе множество S_0 и будет кривой Серпинского. S_0 — одномерный локально-связный континуум. Точки, принадлежащие смежным контурам любого ранга, будем называть точками 1-го рода, остальные точки — точками 2-го рода.

II. Возьмем квадрат T_0, равный квадрату K_1^0. Нам прежде всего нужно будет построить отображение f кривой Серпинского S_0 на T_0, обладающее тем свойством, что *образ любой окрестности каждой точки x 1-го рода содержит круговой сектор с вершиной в точке $f(x)$, а каждая точка 2-го рода является точкой взаимной однозначности этого отображения.*

Для этого зададим отображение f на множестве $M = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{k=1}^{2^{3n}} F_k^n$.

1. Границу F_1^0 квадрата K_1^0 конгруентно отображаем на границу T_0. Если центр T_0 — точка O, то полагаем $f(B_1^0) = 0$. Отрезки нулевого ранга t_{1j}^0 отобразим линейно на прямолинейные отрезки, соединяющие образы их концов. Таким образом, либо каждая сторона границы отобразится на отрезок, и образом границы квадрата 1-го ранга будет контур выпуклого четырехугольника, либо одна сторона

---

* Эта работа выполнена под руководством П. С. Александрова. Пользуюсь случаем выразить ему свою глубокую благодарность.

отобразится в вершину, а три остальные стороны — на соответствующие стороны треугольника.

2. Для построения образов границ квадратов 2-го ранга рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

a) Множество $f(F_k^1)$ есть выпуклый четырехугольный контур. Пусть O_k^1 — его центр тяжести. Тогда полагаем $f(B_k^1) = O_k^1$, а каждый отрезок t_{kj}^1 линейно отобразим на отрезок, соединяющий образы его концов.

b) Множество $f(F_l^1)$ есть контур треугольника OAB. В вершину, являющуюся образом стороны R_l^1 (т. е. в точку O), поместим массу, равную 2, а в остальные вершины — единичные массы. Пусть O_l^1 — центр тяжести этих масс.

Полагаем $f(B_l^1) = O_l^1$. Отрезки t_{lj}^1, не пересекающиеся с B_1^0, линейно отображаем на отрезки, соединяющие образы их концов. Если же в $F_s^2 = KLMN$ отрезок $MN \subset B_1^0$, а точка $L \subset F_k^1$, то отображение f на отрезке KN задаем следующим образом. Пусть C — середина KN, $f(L) = P$ и точка Q — центр тяжести треугольника O_l^1PO. Полагаем $f(C) = Q$, а отрезки KC и CN линейно отображаем соответственно на отрезки O_l^1P и PO.

Таким образом, при отображении границ квадратов 2-го ранга, кроме возможностей, имевших место при отображении границ квадратов 1-го ранга, возникли еще такие:

c) Две стороны квадрата отобразились на два отрезка, третья сторона на двухзвенную ломаную и четвертая в точку, так что образ границы квадрата является вогнутым четырехугольным контуром.

d) Две противоположные стороны отобразились на две двухзвенные ломаные, а другие две стороны в две точки, так что образом границы квадрата будет выпуклый четырехугольный контур.

Следовательно, для определения f на границах кв дратов 3-го ранга нам достаточно рассмотреть лишь эти два случая. В остальных случаях поступаем так же, как и при отображении квадратов 2-го ранга.

В случае c) множество $f(F_k^2)$ есть вогнутый четырехугольный контур $O_k P_1 OA_1$. $O_k^1 P_1 O$ — упомянутая выше двухзвенная ломаная. Отрезок P_1A_1 разделим точкой O_k^2 в отношении $1:2$. Полагаем $f(B_k^2) = O_K^2$. Образы отрезков t_{kj}^2 строим способом, описанным в 2, b).

В случае d) $f(F_s^2)$ — выпуклый четырехугольный контур $O_k^1 P_1 OP_2$, где кажд я из вершин O_k^1 и O является образом стороны квадрата. В вершины O_k^1 и O поместим массы, равные 2, а в точки, делящие каждую из сторон $O_k^1 P_1$, $O_k^1P_2$, OP_1, OP_2 в отношении 2:1, помещаем массы, равные 1. Если центр тяжести этих масс будет точка O_s^2, то полагаем $f(B_s^2) = O_s^2$. Затем строим образы отрезков t_{sj}^2 ранее описанным способом.

Таким образом, единственная новая возможность, встречающаяся при отображении границ квадр тов 3-го ранга, будет: две стороны отобр жаются на два отрезка, одна — на двухзвенную ломаную и одна в точку, так что обр зом границы квадрата будет выпуклый четырехугольный контур. Следовательно, если задать отображение во всех остальных случаях ранее описанным способом, то для построения отображения границ кв дратов 4-го ранга нам достаточно рассмотреть лишь этот новый случай.

e) Множество $f(F_k^3)$ есть выпуклый четырехугольный контур $O_k^2RP_1S$; O_k^2 — образ одной стороны, двухзвенная ломаная RP_1S — образ противоположной стороны. Пусть точки D_1 и D_2 делят отрезки RP_1

и SP_1 в отношении $2:1$. Поместим в точку O_k^2 массу, равную 2, а в точки R, S, D_1 и D_2 — единичные массы. Пусть O_k^3 — центр тяжести этих масс. Полагаем $f(B_k^3)=O_k^3$. Затем образы отрезков t_{kj}^3 строим так же, как и ранее.

Нетрудно видеть, что, начиная с построения отображения границ квадратов 4-го ранга, повторяется один из случаев a), b), c), d), e). Поэтому, применяя последовательно описанный нами способ, мы сможем задать отображение f на множестве M. Так как M всюду плотно в S_0, а отображение f равномерно непрерывно на M, причем $f(M)$ всюду плотно в квадрате T_0, то f можно распространить на все S_0, причем $f(S_0)=T_0$. Полученное отображение удовлетворяет всем поставленным условиям.

III. Определим теперь компакт S как топологическое произведение $S=S_0\times C$, где C — канторово совершенное множество, построенное, как обычно, на отрезке $[0,1]$. Построим открытое отображение компакта S на квадрат T_0. Это отображение будет произведением трех отображений, а именно: 1) отображения F множества $S=S_0\times C$ на топологическое произведение $T=T_0\times C$; 2) топологического отображения g компакта T на себя; 3) проекции P множества T на квадрат T_0.

1. Пусть f — построенное отображение кривой Серпинского S_0 на квадрат T_0. В дальнейшем через p будем всегда обозначать точки S_0, а через z — точки C. Таким образом, точками S будут пары (p, z).

Тогда отображение F определяем следующей формулой:

$$F(p,z)=[f(p),z].$$

2. Пусть $V_1,\ldots,V_n,\ldots$ суть все смежные контуры кривых S_0; пусть $f(V_k)=q_k$. Обозначим k-й элемент последовательности чисел $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2},\ldots,\frac{\pi}{n},\ldots,\frac{(2n-1)\pi}{n},\ldots$ через α_k.

Определим счетное множество точек $\{a_{i_1\ldots i_k}\}, \{b_{i_1\ldots i_k}\}, \{c_{i_1\ldots i_k}\}$ $(1\leqslant k<\infty,\ 0\leqslant i_j<\infty)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1°. $a_{0\ldots0}=c_{0\ldots0}=b_{0\ldots0}=1$. Всякая точка $c_{i_1\ldots i_k}$, у которой по крайней мере один индекс не равен 0, определяется как центр смежного интервала $(a_{i_1\ldots i_k},\ b_{i_1\ldots i_k})$.

2°. $c_{i_1\ldots i_k+1}<c_{i_1\ldots i_k i_{k+1}}\leqslant c_{i_1\ldots i_k}$

3°. $0<c_{i_1\ldots i_k j}-c_{i_1\ldots i_k j+1}<\dfrac{1}{2^{k+1}}$.

4°. $c_{i_1\ldots i_k 0}=c_{i_1\ldots i_k-1}$.

5°. $\lim\limits_{i_1\to\infty} c_{i_1}=0;\quad \lim\limits_{i_{k+1}\to\infty} c_{i_1\ldots i_k i_{k+1}}=b_{i_1\ldots i_k}$.

Строим последовательно топологические отображения $g_0, g_1,\ldots,g_n$ множества T на себя. g_0 — тождественное отображение. Если $g_0, g_1,\ldots,g_k$ построены, то g_{k+1} строим следующим образом. Пусть $c_{i_1\ldots i_k j+1}<z\leqslant c_{i_1\ldots i_k j}$. Построим вокруг точек (q_l, z) $(1\leqslant l\leqslant i_1+\ldots+i_k+j+1)$ в квадрате $S_0\times z$ попарно не пересекающиеся круги (γ_l^k, z) числом $i_1+\ldots+i_k+j+1$ радиусов $\leqslant 1/2^{k+1}$. Пусть (Γ_l^k, z) $(1\leqslant l\leqslant i_1+\ldots+i_k+j+1)$ обозначает круг с центром в точке $g_k\ldots g_0(p_l, z)$ радиуса $2\delta_{i_1\ldots i_k j}$, лежащий в квадрате $T_0\times z$, причем числа $\delta_{i_1\ldots i_k j}$ должны удовлетворять следующим условиям:

1°. $(\Gamma_{l_1}^k, z)\cap(\Gamma_{l_2}^k, z)=0$, если $l_1\neq l_2$.

2°. $(\Gamma_l^k, z) \subset (\gamma_l^k, z)$.

3°. На окружности (Γ_l^k, z) не должно быть ни одной точки $g_k \ldots g_0 (q_n, z)$, где $1 \leqslant n < \infty$.

4°. Круг (Γ_l^k, z) принадлежит кругу (Γ_t^r, z) $(0 \leqslant r \leqslant k)$ тогда и только тогда, когда $g_k \ldots g_0 (q_l, z) \subset (\Gamma_t^r, z)$.

5°. $\delta_{i_1 \ldots i_k j} < 1/2^{k+2}$.

Если центр круга $g_k \ldots g_0 (q_l, z)$ $(1 \leqslant l \leqslant i_1 + \ldots + i_k + j + 1)$ примем за начало координат, то круг (Γ_l^k, z) топологически отобразим на себя при помощи следующих функций:

$$\rho' = \rho, \qquad \psi = \varphi + \alpha_j \text{ для } 0 \leqslant \rho \leqslant \delta_{i_1 \ldots i_k j},$$

$$\rho' = \rho, \qquad \psi = \varphi + (2\delta_{i_1 \ldots i_k j} - \rho) \frac{\alpha_j}{\delta_{i_1 \ldots i_k j}} \text{ для } \delta_{i_1 \ldots i_k j} \leqslant \rho \leqslant 2\delta_{i_1 \ldots i_k j};$$

точки $T_0 \times z$, не принадлежащие $\sum\limits_{l=1}^{i_1 + \ldots + i_k + j + 1} (\Gamma_l^k, z)$, оставляем неподвижными.

Полученное топологическое отображение T на себя обозначим через g_{k+1}. Последовательность $\chi_0 = g_0, \chi_1 = g_1 - g_0, \ldots, \chi_k = g_k \ldots g_0 \ldots$ равномерно сходится к искомой функции g, топологически отображающей T на себя.

3. Обозначим через P проекцию множества T на квадрат T_0.

Отображение $\Phi(S) = PGF(S)$ будет открытым отображением одномерного компакта S на квадрат T_0

IV. Нетрудно построить отображение R компакта S на локально-связный континуум L, при котором точки, имеющие различные образы при отображении Φ, имеют различные образы и при отображении R. Отображение Φ компакта S на T_0 естественным образом порождает непрерывное отображение Ψ кривой L на T_0: если точка $A \subset L$, то полагаем $\Psi(A) = \Phi[R^{-1}(A)]$, так что $\Phi(S) = \Psi R(S)$.

Так как Φ — открытое отображение на S, то Ψ открыто на L, чем и решена наша задача.

Поступило
3 III 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. N. Kolmogoroff, Ann. Math., **38**, Ser. 2, 36 (1937). [2] П. С. Александров, ДАН, **4 (13)**, 283 (1936). [3] W. Sierpinski, C. R., **162**, 629 (1916).