Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVI, № 3

ФИЗИКА

АСЕН ДАЦЕВ

ОБ ОХЛАЖДЕНИИ СТЕРЖНЯ, СОСТАВЛЕННОГО ИЗ ДВУХ ОДНОРОДНЫХ СТЕРЖНЕЙ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

(Представлено академиком С. И. Вавиловым 27 II 1947)

Настоящая проблема является обобщением проблемы, которой мы занимались в предыдущей работе ([1]).

Рассмотрим стержень, составленный из двух стержней A_1 и A_2 с длинами l_1 и l_2, соответственно, и незначительной толщины. Стержень A_1 расположен по оси OX от O_1 до O и стержень A_2 — по оси OX от O до O_2. Если $u_1(x, t)$ $(-l_1 < x < 0)$ означает температуру A_1, $u_2(x, t)$ $(0 < x < l_2)$ — температуру A_2, u_1 и u_2 будут удовлетворять уравнениям теплопроводности

$$a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \frac{\partial u_1}{\partial t}, \tag{1}$$

$$a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \frac{\partial u_2}{\partial t}, \tag{1'}$$

где $a_1^2 = k_1/\rho_1 \sigma_1$, $a_2^2 = k_2/\rho_2 \sigma_2$, как в ([1]).

В начальный момент температуры A_1 и A_2 даны функциями $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$, т. е.

$$u_1(x, 0) = \Phi_1(x) \quad (-l_1 < x < 0), \tag{2}$$

$$u_2(x, 0) = \Phi_2(x) \quad (0 < x < l_2). \tag{2'}$$

Температуры на концах O_1 и O_2 даны функциями $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ $(t > 0)$, т. е.

$$u_1(-l_1, t) = \varphi_1(t), \quad u_2(l_2, t) = \varphi_2(t). \tag{3}$$

В точке O существуют условия:

$$u_1 = u_2, \tag{4}$$

$$(x = 0, \ t > 0)$$

$$k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}. \tag{4'}$$

Нужно найти функции $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$, удовлетворяющие уравнениям (1) и (1'), начальным условиям (2) и (2'), граничным условиям (3) и условиям (4) и (4') в точке O.

Обозначим через $\varphi(t)$ $(t > 0)$ температуру в точке O, т. е. $\varphi(t) = u_1(0, t) = u_2(0, t)$. Считая $\varphi(t)$ известной функцией, можно представить функцию $u_2(x, t)$, удовлетворяющую (1'), (2'), (3) и $u_2(0, t) = \varphi(t)$, в виде (([2]), стр. 357):

$$u_2(x, t) = V_2(x, t) + W_2(x, t), \tag{5}$$

где

$$V_2(x, t) = \int\limits_0^{l_2} \Gamma_2(x, \xi, t)\, \Phi_2(\xi)\, d\xi, \tag{6}$$

$$\Gamma_2(x, \xi, t) = \frac{1}{2l_2}\left\{ \vartheta_3\left(\frac{x-\xi}{2l_2}, \frac{a_2^2 t}{l_2^2}\right) - \vartheta_3\left(\frac{x+\xi}{2l_2}, \frac{a_2^2 t}{l_2^2}\right)\right\}, \tag{6'}$$

а ϑ_3 — тета-функция:

$$\vartheta_3(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(x+n)^2/t}. \tag{7}$$

W_2 представится выражением $(0 < x < l_2)$ ([2]):

$$W_2(x, t) = -\frac{a_2^2}{l_2}\varphi(t) * \frac{\partial}{\partial x}\vartheta_3\left(\frac{x}{2l_2}, \frac{a_2^2 t}{l_2^2}\right) +$$

$$+ \frac{a_2^2}{l_2}\varphi_2(t) * \frac{\partial}{\partial x}\vartheta_3\left(\frac{l_2 - x}{2l_2}, \frac{a_2^2 t}{l_2^2}\right), \tag{8}$$

где звездочка (*) означает следующее интегрирование (свертывание) ([2]):

$$\varphi * \psi = \psi * \varphi = \int\limits_0^t \varphi(\tau)\, \psi(t-\tau)\, d\tau.$$

Тем же способом можно представить и u_1:

$$u_1(x, t) = V_1(x, t) + W_1(x, t), \tag{9}$$

$$V_1(x, t) = \int\limits_{-l_1}^{0} \Gamma_1(x, \xi, t)\, \Phi_1(\xi)\, d\xi, \tag{10}$$

$$\Gamma_1(x, \xi, t) = \frac{1}{2l_1}\left\{ \vartheta_3\left(\frac{x-\xi}{2l_1}, \frac{a_1^2 t}{l_1^2}\right) - \vartheta_3\left(\frac{x+\xi}{2l_1}, \frac{a_1^2 t}{l_1^2}\right)\right\}, \tag{10'}$$

$$W_1(x, t) = -\frac{a_1^2}{l_1}\varphi_1(t) * \frac{\partial}{\partial x}\vartheta_3\left(\frac{l_1 + x}{2l_1}, \frac{a_1^2 t}{l_1^2}\right) +$$

$$+ \frac{a_1^2}{l_1}\varphi(t) * \frac{\partial}{\partial x}\vartheta_3\left(\frac{-x}{2l_1}, \frac{a_1^2 t}{l_1^2}\right), \tag{11}$$

$$-l_1 < x < 0.$$

Построенные таким образом функции u_2 (5) и u_1 (9) должны удовлетворять условиям (4) и (4'). (4) автоматически выполняется введением функции $\varphi(t)$. Для того чтобы выполнить (4'), нужно найти $\partial u_2/\partial x$ и $\partial u_1/\partial x$. Из (5) будем иметь:

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{\partial V_2}{\partial x} + \frac{\partial W_2}{\partial x} = P_2(x, t) + Q_2(x, t). \tag{12}$$

Из уравнений (6) и (8) получим

$$P_2(x, t) = \int\limits_0^{l_2} \frac{\partial \Gamma_2}{\partial x}\, \Phi_2(\xi)\, d\xi, \tag{13}$$

$$Q_2(x, t) = -\frac{a_2^2}{l_2}\varphi(t) * \frac{\partial^2}{\partial x^2}\vartheta_3\left(\frac{x}{2l_2}, \frac{a_2^2 t}{l_2^2}\right) +$$

$$+ \frac{a_2^2}{l_2}\varphi_2(t) * \frac{\partial^2}{\partial x^2}\vartheta_3\left(\frac{l_2 - x}{2l_2}, \frac{a_2^2 t}{l_2^2}\right). \tag{14}$$

Так как ϑ_3 из (14) удовлетворяет уравнению (1'), ее вторую производную по x можно заменить ее производной по t. Но найденный так первый член правой части (14) становится неопределенным для $x \to 0$. Для избежания этой трудности интегрируем (4') по t от 0 до t

$$k_1 \int_0^t \frac{\partial u_1}{\partial x} d\tau = k_2 \int_0^t \frac{\partial u_2}{\partial x} d\tau. \qquad (4'')$$

Используя (12), правую часть (4'') можно представить для фиксированного $x > 0$ в виде

$$k_2 \overline{P}_2 + k_2 \overline{Q}_2. \qquad (15)$$

$$\overline{P}_2(x, t) = \int_0^t P_2(x, \tau) \, d\tau, \qquad \overline{Q}_2(x, t) = \int_0^t Q_2(x, \tau) \, d\tau. \qquad (16)$$

Исходя из Q_2 (14), заменяя вторую производную ϑ_3 по x ее первой производной по t и используя теорему Дирихле, будем иметь для $\overline{Q}_2$ (16):

$$\overline{Q}_2(x, t) = -\frac{1}{l_2} \int_0^t \varphi(\tau) \vartheta_3 \left[\frac{x}{2l_2}, \frac{a_2^2 (t-\tau)}{l_2^2}\right] d\tau + q_2(x, t), \qquad (17)$$

$$q_2(x, t) = \frac{1}{l_2} \int_0^t \varphi_2(\tau) \vartheta_3 \left[\frac{l - x}{2l_2}, \frac{a_2^2 (t-\tau)}{l_2^4}\right] d\tau. \qquad (17')$$

Представим также и левую часть (4'') для фиксированного $x < 0$ в виде $k_1 \overline{P}_1 + k_1 \overline{Q}_1$, где $\overline{P}_1, \overline{Q}_1, q_1$ получаются аналогично $\overline{P}_2, \overline{Q}_2 q_2$.

Подставляя $\overline{P}_2, \overline{Q}_2, \overline{P}_1, \overline{Q}_1$ в (4'') для $x = 0$ (и доказав справедливость (17) для $x = 0$), получим

$$\int_0^t \varphi(\tau) K(t, \tau) \, d\tau = f(t), \qquad (18)$$

где

$$K(t, \tau) = \frac{k_1}{l_1} \vartheta_3 \left[0, \frac{a_1^2 (t-\tau)}{l_1^2}\right] + \frac{k_2}{l_2} \vartheta_3 \left[0, \frac{a_2^2 (t-\tau)}{l_2^2}\right], \qquad (19)$$

$$f(t) = k_2 \overline{P}_2(0, t) - k_1 \overline{P}_1(0, t) + k_2 q_2(0, t) - k_1 q_1(0, t). \qquad (20)$$

(18) представляет интегральное уравнение Вольтерра первого рода ($f(0) = 0$).

Используя разложение (7) для функции ϑ_3, входящей в ядро K уравнения (19), интегральное уравнение (18) можно представить в виде:

$$\int_0^t \varphi(\tau) \frac{G(t, \tau)}{\sqrt{t - \tau}} d\tau = f(t), \qquad (21)$$

$$G(t, \tau) = A + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{k_1}{a_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' e^{-\frac{n^2 l_1^2}{a_1^2 (t-\tau)}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{k_2}{a_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' e^{-\frac{n^2 l_2^2}{a_2^2 (t-\tau)}}, \qquad (22)$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{k_1}{a_1} + \frac{k_2}{a_2}\right). \qquad (22')$$

В суммах Σ' (22) $n \neq 0$, поэтому $G(t, t) = A$. Следовательно, (21) представляет одно обобщенное абелево уравнение. Как известно ([3], стр. 23), его можно превратить в интегральное уравнение Вольтерра второго рода с параметром $\lambda = 1$, решение которого известно и идентично решению уравнения (21). Получая таким образом $\varphi(t)$ и подставляя ее в (8) и (11), получим искомые функции u_1 и u_2, удовлетворяющие всем поставленным условиям.

Если $l_1 \to \infty$, $l_2 \to \infty$ (это значит, что настоящая проблема превращается в проблему ([1])), легко убедиться, что $G \to A$, $f(t) \to H_1$ ((12'') из ([1])), так что уравнение (21) превращается в абелево уравнение (12) из ([1]). Так же легко можно получить частное решение, если $l_1 \to \infty$, а l_2 — конечная величина.

Если граничные условия (3) были бы заменены условиями $u'_{1,x}(-l_1, t) = \psi_1(t)$, $u'_{2,x}(l_2, t) = \psi_2(t)$ (где $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ — заданные функции), при тех же самых начальных условиях, то задача решалась бы следующим образом. Вводя температуру $\varphi(t)$ для точки O, $u_2(x, t)$ $(0 < x < l_2)$ представится формулой, аналогичной u_2 (5) ([2]), но вместо ϑ_3 появится другая тета-функция ϑ_2. То же самое мы получим для $u_1(x, t)$ $(-l_1 < x < 0)$.

Рассуждая таким же образом, получим для определения $\varphi(t)$ одно обобщенное абелево уравнение, аналогичное (21). Так же решается и задача, когда в одной конечной точке O_1 дана температура $u_1(-l_1, t) = \varphi_1(t)$, а в другой O_2 — излучение, пропорциональное $u'_{2,x}$ $(u'_{2,x}(l_2, t) = \psi_2(t))$.

Поступило
31 I 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Дацев, ДАН, **55**, № 2 (1947). [2] G. Doetsch. Die Laplace Transformation Berlin, 1937. [3] Э. Гурса, Курс математ. анализа, **3**, М., 1934.