Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVI, № 3

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Я. А. МИНДЛИН

ПРЕДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В СЛУЧАЕ КРУГА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 10 XI 1946)

В настоящей работе дается решение задачи об упругих колебаниях круга радиуса R при произвольном начальном режиме и при произвольных заданных на окружности проекциях u_r, u_θ вектора смещения.

Как известно, для плоской задачи теории упругости в полярных координатах выражение составляющих вектора смещения через потенциалы имеет вид

$$u_r=\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\qquad u_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}-\frac{\partial\psi}{\partial r},\tag{1}$$

где функции φ и ψ удовлетворяют уравнениям

$$\Delta\varphi=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2},\qquad \Delta\psi=\frac{1}{b^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2},\tag{2}$$

$$a=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}},\qquad b=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

Через ρ мы обозначили плотность среды, а λ и μ — упругие постоянные Ляме.

Математически вышеуказанная задача ставится как задача отыскания интегралов системы уравнений (2) для $r<R$, удовлетворяющих так называемым начальным и граничным условиям:

$$u_r\Big|_{t=0}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(1)}(r)\cos n\theta+b_n^{(1)}(r)\sin n\theta,$$

$$u_\theta\Big|_{t=0}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(2)}(r)\cos n\theta+b_n^{(2)}(r)\sin n\theta,$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial t}\Big|_{t=0}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(3)}(r)\cos n\theta+b_n^{(3)}(r)\sin n\theta,$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t}\Big|_{t=0}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(4)}(r)\cos n\theta+b_n^{(4)}(r)\sin n\theta,$$

$$u_r\Big|_{r=R}=\sum_{n=0}^{\infty}p_n^{(1)}(t)\cos n\theta+q_n^{(1)}(t)\sin n\theta,$$

$$u_\theta\Big|_{r=R}=\sum_{n=0}^{\infty}p_n^{(2)}(t)\cos n\theta+q_n^{(2)}(t)\sin n\theta.$$

Для нахождения искомых функций φ и ψ воспользуемся интегральными представлениями решений уравнений (2).

Имеем

$$\varphi=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\int_{0}^{\infty}\left[A_n^{(1)}(at-r\cos h\xi)+A_n^{(2)}(at+r\cos h\xi)\right]\cos hn\xi d\xi\cos n\theta\right\}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_{0}^{\infty}\left[B_n^{(1)}(at-r\cos h\xi)+B_n^{(2)}(at+r\cos h\xi)\right]\cos hn\xi d\xi\sin n\theta\right\};\qquad(3)$$

$$\psi=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\int_{0}^{\infty}\left[C_n^{(1)}(bt-r\cos h\xi)+C_n^{(2)}(bt+r\cos h\xi)\right]\cos hn\xi d\xi\cos n\theta\right\}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_{0}^{\infty}\left[D_n^{(1)}(bt-r\cos h\xi)+D_n^{(2)}(bt+r\cos h\xi)\right]\cos hn\xi d\xi\sin n\theta\right\}.\qquad(4)$$

Удовлетворяя начальным условиям, после несложных преобразований получим систему интегральных уравнений для определения функций $A_n^{(i)}$, $D_n^{(i)}$ $(i=1,\ 2)$.

Введя обозначения

$$A_n^{(1)}(-\mu)+A_n^{(2)}(\mu)=A^{(1,n)}(\mu),\qquad(5)$$

$$-A_n^{(1)}(-\mu)+A_n^{(2)}(\mu)=A^{(2,n)}(\mu)\qquad(6)$$

и аналогичные обозначения для других функций, мы должны иметь

$$a_n^{(1)}(r)+b_n^{(2)}(r)=\int_{0}^{\infty}\left[A^{(1,n)'}(r\cos h\xi)+D^{(1,n)'}(r\cos h\xi)\right]\cos h(n-1)\xi d\xi,$$

$$a_n^{(1)}(r)+b_n^{(2)}(r)=\int_{0}^{\infty}\left[A^{(1,n)'}(r\cos h\xi)-D^{(1,n)'}(r\cos h\xi)\right]\cos h(n+1)\xi d\xi.\qquad(7)$$

Аналогичные интегральные уравнения получаем и для $A^{(2,n)''}$, $D^{(2,n)''}$, а также для производных $B^{(i,n)}$, $C^{(i,n)}$. Интегральные уравнения (7), а также интегральные уравнения для $A^{(2,n)''}$, $D^{(2,n)''}$, представляющие собой обобщенные интегральные уравнения Шлемильха, решение которых было нами приведено в ([4]), позволяют найти искомые функции $A_n^{(2)}$, $B_n^{(2)}$, $C_n^{(2)}$, $D_n^{(2)}$ для положительного значения аргумента, изменяющегося в промежутке $(0,\ R)$, и функции $A_n^{(1)}$, $B_n^{(1)}$, $C_n^{(1)}$, $D_n^{(1)}$ для отрицательного значения аргумента, абсолютная величина которого заключается между 0 и R.

Определение последних функций для положительного значения аргумента дано:

$$\left.\begin{aligned}&A_n^{(1)}(at)+A_n^{(2)}(at)=0;\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\\&D_n^{(1)}(bt)+D_n^{(2)}(bt)=0,\end{aligned}\right\}\qquad(8)$$

что представляет собою условие „непрерывности“ в начале координат.

Для определения искомых функций для других значений аргумента будем удовлетворять граничным условиям.

Имеем:

$$p_n^{(1)}(t)+q_n^{(2)}(t)=$$

$$=\int_{-\infty}^{at-R}\frac{-A_n^{(1)'}(z)\,T_{n+1}\left(\dfrac{at-z}{R}\right)dz}{\sqrt{(at-z)^2-R^2}}+\int_{at+R}^{\infty}\frac{A_n^{(2)'}(z)\,T_{n+1}\left(\dfrac{z-at}{R}\right)dz}{\sqrt{(z-at)^2-R^2}}+$$

$$+\int_{-\infty}^{bt-R}\frac{D_n^{(1)'}(z)\,T_{n+1}\left(\dfrac{bt-z}{R}\right)dz}{\sqrt{(z-bt)^2-R^2}}+\int_{bt+R}^{\infty}\frac{D_n^{(2)'}(z)\,T_{n+1}\left(\dfrac{z-bt}{R}\right)dz}{\sqrt{(z-bt)^2-R^2}} \tag{9}$$

$$p_n^{(1)}(t)-q_n^{(2)}(t)=$$

$$=\int_{-\infty}^{at-R}\frac{-A_n^{(1)'}(z)\,T_{n-1}\left(\dfrac{at-z}{R}\right)dz}{\sqrt{(at-z)^2-R^2}}+\int_{at+R}^{\infty}\frac{A_n^{(2)'}(z)\,T_{n-1}\left(\dfrac{z-at}{R}\right)dz}{\sqrt{(z-at)^2-R^2}}+$$

$$+\int_{-\infty}^{bt-R}\frac{-D_n^{(1)'}(z)\,T_{n-1}\left(\dfrac{bt-z}{R}\right)dz}{\sqrt{(bt-z)^2-R^2}}+\int_{bt+R}^{\infty}\frac{D_n^{(2)'}(z)\,T_{n-1}\left(\dfrac{z-bt}{R}\right)dz}{\sqrt{(z-bt)^2-R^2}}. \tag{10}$$

Аналогичные соотношения получаем и для функций $B_n^{(i)}$ и $C_n^{(i)}$.

Пусть переменное t изменяется в интервале $0\leqslant t\leqslant 2R/a$.

Пользуясь интегральными уравнениями (9) и (10), мы определим искомые функции во всем интервале изменения их аргументов. С этой целью разобьем первые и третьи слагаемые в уравнениях (9) и (10) на два следующим образом:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{at-R}\{\}\,dz&=\int_{-\infty}^{-R}\{\}\,dz+\int_{-R}^{at-R}\{\}\,dz,\\ \int_{-\infty}^{bt-R}\{\}\,dz&=\int_{-\infty}^{-R}\{\}\,dz+\int_{-R}^{bt-R}\{\}\,dz.\end{aligned} \tag{11}$$

Первые слагаемые правых частей (11) мы можем считать равными нулю, вторые же слагаемые представляют собой известные функции, которые мы и переносим в левую часть уравнений (9) и (10). Полученные при этом интегральные уравнения дадут возможность определить функции $A_n^{(2)}$ и $D_n^{(2)}$ в конечном виде в интервале $(R,\ 3R)$.

Для дальнейшего определения искомых функций нужно опять обратиться к системе интегральных уравнений (9) и (10) и поступать согласно предыдущему. Воспользовавшись оценками акад. Соболева, помещенными в книге акад. Смирнова ([1]), так же как это делается для одного волнового уравнения, нетрудно притти к выводу, что полученное нами решение вида (3), (4) в среднем сколь угодно мало отличается от истинного.

Рассмотренная задача была нами ранее решена ([2]) при определенном образом заданных начальных и граничных условиях (нулевой начальный режим, граничные условия представляли собой конечные тригонометрические суммы), пользуясь интегралом волнового уравнения, данного Whittaker'ом ([3]).

Институт механики
Академии Наук СССР

Поступило
10 XI 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Смирнов, Курс высшей математики, **4**, гл. 3, § 3, 1941. [2] Я. Миндлин, ДАН, **15**, № 9 (1937); **16**, № 1 (1937). [3] E. Whittaker, Mathemat. Ann. (1903). [4] Я. А. Миндлин, ДАН, **56**, № 2 (1947).