Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVI, № 3

МАТЕМАТИКА

И. С. СОМИНСКИЙ

О ПРОИЗВОДЯЩИХ ЭЛЕМЕНТАХ ГРУППЫ АВТОМОРФИЗМОВ ТРОЙНИЧНОЙ КВАДРАТИЧНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОЙ ФОРМЫ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 6 XI 1946)

Пусть $f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2gyz + 2hzx + 2kxy$ — неопределенная форма с целыми коэффициентами положительного дискриминанта D, не представляющая нуля; $F(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Gyz + 2Hzx + 2Kxy$ — форма, взаимная f; $\mathfrak{G}$ — группа целочисленных автоморфизмов f; Ω — фундаментальная область группы $\mathfrak{G}$, построенная по способу Эрмита — Зеллинга [3]; $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ — границы Ω, по которым она примыкает к соседним фундаментальным областям $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k$; $S_1, S_2, \ldots, S_k$ — автоморфизмы f, при помощи которых Ω преобразуется в $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k$.

Покажем, что автоморфизмы S_i либо второго, либо бесконечного порядка.

Всякий автоморфизм формы $f(x, y, z)$ преобразует в себя некоторую прямую $OM: \frac{x}{\lambda} = \frac{y}{\mu} = \frac{z}{\nu}$ и, следовательно, преобразует в себя плоскость $P: \frac{\partial f}{\partial \lambda} = \frac{\partial f}{\partial \mu} = \frac{\partial f}{\partial \nu}$, сопряженную с OM [1]. Целочисленным унимодулярным преобразованием может перейти к новым переменным так, что прямая OM и плоскость P будут иметь уравнениями $\frac{x}{A} = \frac{y}{K} = \frac{z}{H}$ и $x = 0$, соответственно. Тогда $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & \alpha & \beta \\ n & \gamma & \delta \end{pmatrix}$, и подстановка $\sigma = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ преобразует в себя бинарную форму (b, g, c), получаемую из $f(x, y, z)$ при $x = 0$. Очевидно, что $S^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_k & \alpha_k & \beta_k \\ n_k & \gamma_k & \delta_k \end{pmatrix}$, где $\begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ \gamma_k & \delta_k \end{pmatrix} = \sigma^k$, и потому S либо бесконечного порядка, либо порядок S равен 1, 2, 3, 4, 6. Если OM лежит внутри конуса $f(x, y, z) = 0$, т. е. $f(A, K, H) > 0$, (b, g, c) — определенная форма, и S конечного порядка, если же OM лежит вне этого конуса, (b, g, c) — неопределенная форма, и S — второго или бесконечного порядка [2].

Лемма 1. *Прямая, преобразуемая в себя автоморфизмом третьего порядка формы f, есть пересечение плоскостей симметрии.*

Пусть $f(x, y, z)$ имеет автоморфизм S третьего порядка. Подстановкой $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \mu \\ 0 & \lambda_1 & \mu_1 \end{pmatrix}$ преобразуем f так, чтобы (b, g, c) была приведенной, тогда $b = c = b + 2g + c$ и $f(x, y, z) = ax^2 - 2ty^2 - 2tz^2 + 2tyz + 2hzx + 2kxy$. В группе автоморфизмов формы (b, g, c) имеются два автоморфизма третьего порядка: $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ и $\sigma_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, причем $\sigma_2 = \sigma_1^2$.

Поэтому, если f имеет автоморфизм $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 0 & -1 \\ n & 1 & -1 \end{pmatrix}$, то она имеет также и автоморфизм $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_1 & -1 & 1 \\ n_1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, и наоборот. Пусть $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, тогда $m = \frac{k+h}{t}$, $n = \frac{h}{t}$, и $f = ax^2 - 2ty^2 - 2tz^2 + 2tyz + 2h_1tzx + 2k_1txy$, где k_1, h_1 — целые.

Нетрудно проверить, что f имеет автоморфизмы второго порядка $T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k_1+h_1 & 0 & -1 \\ k_1+h_1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k_1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ h_1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, оставляющие неподвижными плоскости $(k_1+h_1)x - y - z = 0$, $k_1x - 2y + z = 0$ и $h_1x + y - 2z = 0$, соответственно. Каждая из этих плоскостей содержит прямую OM: $\frac{x}{3} = \frac{y}{h_1 + 2k_1} = \frac{z}{k_1 + 2h_1}$.

Следствие. Прямая, преобразуемая в себя автоморфизмом шестого порядка формы f, есть пересечение плоскостей симметрии.

Лемма 2. *Прямая, преобразуемая в себя автоморфизмом четвертого порядка формы f, есть пересечение плоскостей симметрии.*

Автоморфизмов четвертого порядка у приведенных бинарных форм существует два: $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, причем $\sigma_1^3 = \sigma_2$. Рассуждая так же, как и в лемме 1, имеем $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 0 & 1 \\ n & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $f = ax^2 - by^2 - bz^2 + 2hzx + 2kxy$; $m = \frac{k+h}{b}$; $n = \frac{k-h}{b}$.

Легко проверить, что f имеет автоморфизмы $T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{k+h}{b} & 0 & -1 \\ \frac{k+h}{b} & -1 & 0 \end{pmatrix}$ и $T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{k-h}{b} & 0 & 1 \\ \frac{h-k}{b} & 1 & 0 \end{pmatrix}$, оставляющие неподвижными плоскости $(k+h)x - by - bz = 0$, $(k-h)x - by + bz = 0$, содержащие прямую $\frac{x}{b} = \frac{y}{k} = \frac{z}{h}$.

Теорема. *Преобразование фундаментальной области в соседнюю может осуществляться только автоморфизмом второго или бесконечного порядка.*

Пусть S — автоморфизм третьего порядка, преобразующий в себя прямую OM. Предположим, что S преобразует фундаментальную область Ω в соседнюю фундаментальную область Ω_1, а Ω_1 в Ω_2. Ω_2 отлична от Ω, так как иначе S был бы второго порядка.

Прямая OM есть, таким образом, общее ребро областей Ω, Ω_1 и Ω_2, последовательно переходящих друг в друга при преобразовании S. Граница γ между Ω и Ω_1 переходит при этом в границу γ_1 между Ω_1 и Ω_2, а γ_1 — в границу γ_2 между Ω_2 и Ω. Ни одна из границ γ, γ_1, γ_2 не может лежать в плоскости симметрии, так как иначе переход через эту границу осуществлялся бы автоморфизмом второго порядка. Выходит, что плоскости симметрии, содержащие OM (лемма 1), проходят внутри фундаментальной области. Это невозможно.

Аналогичными рассуждениями можно показать, что преобразование фундаментальной области в соседнюю не может осуществляться автоморфизмом четвертого или шестого порядка.

Ниже приводится пример, показывающий, что преобразование фундаментальной области в соседние посредством только автоморфизмов второго порядка не всегда возможно.

Пример. Выпуклый многогранный угол $z > 0$; $529x - 78y - 6z > 0$; $69x - 10y - 2z > 0$; $138x - 19y - 8z > 0$; $345x - 40y - 32z > 0$; $y - z > 0$ есть фундаментальная область группы автоморфизмов формы $46x^2 - y^2 - z^2$. Соответствующие граням этой фундаментальной области автоморфизмы суть

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad S_2 = \begin{pmatrix} 231 & -34 & -2 \\ 1196 & -176 & -11 \\ 1012 & -149 & -8 \end{pmatrix}; \quad S_3 = \begin{pmatrix} 415 & -60 & -12 \\ 2760 & -399 & -80 \\ 552 & -80 & -15 \end{pmatrix};$$

$$S_4 = \begin{pmatrix} 91 & -12 & -6 \\ 552 & -73 & -36 \\ 276 & -36 & -19 \end{pmatrix}; \quad S_5 = S_2^{-1}; \quad S_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Первая, третья и шестая грани — плоскости симметрии. Четвертая содержит ось второго порядка $\frac{x}{1} = \frac{y}{6} = \frac{z}{3}$. Вторая и пятая соответствуют автоморфизмам бесконечного порядка.

Существенно, что построить фундаментальную область рассматриваемой группы так, чтобы она была ограничена только плоскостями симметрии или плоскостями, содержащими оси второго порядка, нельзя. В самом деле, если бы это удалось и существовала бы фундаментальная область, ограниченная тремя плоскостями симметрии и плоскостью, содержащей ось второго порядка OM, то преобразованием, оставляющим неподвижной OM, мы построили бы удвоенную фундаментальную область, ограниченную шестью плоскостями симметрии. Между тем, последовательность плоскостей симметрии . . . , $552x - 60y - 55z = 0$; $115x - 12y - 12z = 0$; $y - z = 0$; $z = 0$; $529x - 78y = 0$; $3588x - 579y - 5z = 0$, . . . не замыкается

Ленинградский государственный
педагогический институт

Поступило
6 XI 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ch. Hermite, Sur la théorie des formes quadratiques, Oeuvres complètes, 1905, p. 200. [2] E. Selling, J. Crell, **77**, 143 (1874). [3] И. С. Соминский, Уч. зап. Ленинградск. гос. ун-та, № 55, 148 (1940).