Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVI, № 3

МАТЕМАТИКА

В. И. СОБОЛЕВ

ОБ ОБРАТНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ В ПОЛУУПОРЯДОЧЕННЫХ КОЛЬЦАХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 14 XI 1946)

1. Пусть $X=\{x, y, z, \ldots\}$ — полуупорядоченное кольцо, т. е.

I. X — пространство типа K_5 Канторовича [1].

II. X — коммутативное кольцо с единицей e.

III. Элементы кольца X удовлетворяют дополнительным аксиомам:

1° Из $x>0$ и $y>0$ следует $xy \geqslant 0$; $x^2>0$ для любого $x \neq 0$.

2° Для любого $x>0$ $\inf(x, e)>0$.

3° Если $x_{n+1} \geqslant x_n$ и последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то для любого y

$$\sup_n (x_n \cdot y) = (\sup_n x_n) \cdot y.$$

Тогда, как известно [2-4], для любого $x \in X$ существует разложение единицы на дизъюнктные части e_λ, $-\infty<\lambda<\infty$, причем

(a) $e_\lambda \leqslant e_\mu$ для $\lambda<\mu$;

(b) $e_\lambda \cdot e_\mu = e_\lambda$ для $\lambda<\mu$;

(c) $e_{\lambda-0}=e_\lambda$;

(d) $\lim\limits_{\lambda \to \infty} e_\lambda = 0$, $\lim\limits_{\lambda \to \infty} e_\lambda = e$;

и элемент x представим в виде:

$$x=\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda de_\lambda .$$

Приведенная теорема является аналогом теоремы Riesz'a об интегральном представлении ограниченного симметрического оператора в гильбертовом пространстве. Эту аналогию можно продолжить и получить спектральное условие для существования в X элемента, обратного данному. Предварительно сделаем несколько замечаний.

2. Используя дизъюнктные части единицы, т. е. элементы e' такие, что $0<e' \leqslant e$ и $e'(e-e')=0$ (или, что все равно, $\inf(e', e-e')=0$), можно получить следующее условие существования предела последовательности:

Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ имела предел, необходимо и достаточно, чтобы:

1) последовательность $\{x_n\}$ была ограничена;

2) для любого $\varepsilon>0$ и любой дизъюнктной части единицы e' нашлась другая дизъюнктная часть единицы $e'' \leqslant e'$ и число $n_0(\varepsilon, e')$ такие, что

$$-\varepsilon e'' \leqslant (x_{n+p}-x_n) e'' < \varepsilon e'', \quad n \geqslant n_0, \quad p \text{ — любое.} \tag{1}$$

Из этого условия существования предела легко следует, что умножение в кольце X есть непрерывная операция, т. е. из $x_n \to x$, $y_n \to y$ следует, что существует

$$\lim_n x_n y_n = xy.$$

3. Рассмотрим функции $F(\lambda)$, определенные на всей вещественной прямой и являющиеся на этой прямой равномерными пределами ступенчатых функций. Для таких функций, как и в спектральной теории линейных операторов [5], можно построить интегралы вида

$$y = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) de_\lambda,$$

обладающие, помимо обычных свойств интеграла, свойством

$$\int_{+\infty}^{+\infty} F(\lambda)\, de_\lambda \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\lambda) de_\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)\, \varphi(\lambda)\, de_\lambda. \qquad (2)$$

Пусть теперь $F(\lambda)$ — неограниченная функция, определенная на всей прямой и имеющая лишь конечное число точек разрыва. Пусть

$$F_N(\lambda) = \begin{cases} F(\lambda), & \text{если } |F(\lambda)| \leqslant N, \\ 0, & \text{если } |F(\lambda)| > N. \end{cases}$$

Полагаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)\, de_\lambda = \lim_{N \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F_N(\lambda)\, de_\lambda, \qquad (3)$$

если предел справа существует. Очевидно, и для этих интегралов выполняется условие (2), если интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)\, \Phi(\lambda)\, de_\lambda$$

существует, это следует из непрерывности умножения.

4. Теорема 1. *Для того чтобы элемент $(x - \alpha e)$ имел ограниченный обратный элемент y (т. е. такой, что $(x - \alpha e) y = e$ и $|y| \leqslant Me$ при некотором $M > 0$), необходимо и достаточно, чтобы точка α являлась точкой постоянства для e_λ.*

Наметим вкратце ход доказательства.

Необходимость. Пусть существует

$$y = (x - \alpha e)^{-1}, \quad |y| \leqslant Me.$$

Тогда, прежде всего, находим, что

$$(x - \alpha e)_+ y_+ + (x - \alpha e)_- y_- = e,$$
$$(x - \alpha e)_+ y_- = (x - \alpha e)_- y_+ = 0.$$

Используя затем равенство

$$(x - \alpha e)_+ = \int_\alpha^{\infty} (\lambda - \alpha)\, de_\lambda, \qquad (4)$$

с помощью несложных рассуждений получаем, что

$$(x - \alpha e)_+ y_+ = e - e_\alpha,$$
$$(x - \alpha e)_- y_- = e_\alpha.$$

Умножая (4) на $(e_\mu - e_\alpha)\, y_+$, $\mu > \alpha$, получаем

$$(e_\mu - e_\alpha) \leqslant (\mu - \alpha)(e_\mu - e_\alpha)\, y_+ \leqslant M(\mu - \alpha)(e_\mu - e_\alpha).$$

Так как это неравенство должно быть верно для μ сколь угодно близких к α, то из него следует, что для таких μ $e_\mu = e_\alpha$, т. е. e_λ постоянно в некотором интервале (α, μ_0). Аналогично получаем, что e_λ постоянно в некотором интервале (λ_0, α), т. е. e_λ постоянно в интервале (λ_0, μ_0), ч. т. д.

Достаточность. Пусть e_λ постоянно в некотором интервале, содержащем точку α. Тогда легко видеть, что интеграл

$$y = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{de_\lambda}{\lambda - \alpha}$$

существует, причем y ограничено и $(x - \alpha e) \cdot y = e$, ч. т. д.

С помощью теоремы 1 получаем:

Теорема 2. *Для того чтобы элемент x имел ограниченный обратный, необходимо и достаточно, чтобы $|x| > \alpha e$ для некоторого $\alpha > 0$.*

Замечание. Нетрудно видеть, что из существования $y = (x - \alpha e)^{-1}$ без предположения его ограниченности следует, что α есть точка непрерывности для e_λ.

Укажем еще, что операция деления непрерывна, т. е. если $x_n \to x$ и x_n^{-1} и x^{-1} существуют, то $x_n^{-1} \to x^{-1}$.

5. В заключение отметим, что операции умножения и деления в линейном полуупорядоченном пространстве изучал Б. З. Вулих ([6,7]), употребивший для этого некоторый трансфинитный процесс и получивший ряд интересных результатов, в частности относительно „неполных“ обратных элементов, т. е. таких элементов y, что для данного x $e_y = e_x$ и $xy = e_x$, где e_x — характеристический элемент для x. В случае кольца приведенная выше интегральная форма обратного элемента может быть использована для исследования „неполных“ обратных элементов.

Поступило
14 XI 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Канторович, Математ. сб., **2** (44), 121 (1937). [2] H. Freudenthal, Proc. Ak. Amst., **39**, 641 (1936). [3] S. Steen, Proc. Lond. Math. Soc., **2**, 41, 361 (1936). [4] K. Yosida, Proc. Imp. Ac. Japan, **14**, 292 (1938). [5] А. Плеснер, Успехи мат. наук, **9**, 3 (1941). [6] Б. Вулих, ДАН, **26**, № 9, 847 и 852 (1940).