Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVI, № 3

МАТЕМАТИКА

И. Н. ВЕКУА

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ИНТЕГРАЛА ПУАССОНА ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ

(Представлено академиком Н. И. Мусхелишвили 11 XI 1946)

В этой работе выводится формула, дающая решение задачи Дирихле в случае полуплоскости $y>0$ для уравнения

$$y^{2k}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \tag{1}$$

где k — действительное число >-1.

Если положим

$$x=\xi+\rho\cos\theta,\quad y^{k+1}=(k+1)\rho\sin\theta,$$

где ξ — произвольный действительный параметр, $0\leqslant\rho<\infty$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, то уравнение (1) примет вид

$$\rho^2\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\frac{2k+1}{k+1}\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{k}{k+1}\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}=0.$$

Отсюда видно, что уравнение (1) имеет следующее частное решение:

$$\Omega(x-\xi,\ y)=\frac{1}{\Lambda}\int_0^\theta(\sin\vartheta)^{-\frac{k}{k+1}}d\vartheta,$$

где

$$\theta=\operatorname{arc\,tg}\frac{y^{k+1}}{(k+1)(x-\xi)},\quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi,$$

$$\Lambda=\int_0^\pi(\sin\vartheta)^{-\frac{k}{k+1}}d\vartheta=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2k+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+2}{2k+2}\right)}.$$

Очевидно, в полуплоскости $y>0$ функция $\Omega(x-\xi,\ y)$ ограничена, $0\leqslant\Omega(x-\xi,\ y)<1$, и на прямой $y=0$ удовлетворяет условиям

$$\Omega(x-\xi,\ 0)=\begin{cases}0 \text{ при } x>\xi,\\ 1 \text{ при } x<\xi.\end{cases}$$

Нетрудно видеть, что выражение

$$\frac{d}{d\xi}\Omega(x-\xi,\ y)=\frac{(\sin\theta)^{\frac{1}{k+1}}}{\Lambda\rho}=\frac{1}{\Lambda}y^{\frac{k}{k+1}}\left[(x-\xi)^2+\frac{y^{2k+2}}{2k+2}\right]^{-\frac{k+2}{2k+2}}$$

также является решением уравнения (1) для любого ξ при $y>0$.

Рассмотрим теперь интеграл

$$u(x,\ y)=\frac{y^{\frac{1}{k+1}}}{\Lambda}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\left[(x-\xi)^2+\frac{y^{2k+2}}{2k+2}\right]^{-\frac{k+2}{2k+2}} d\xi, \tag{2}$$

где $f(x)$ — кусочно непрерывная ограниченная функция в интервале $-\infty<x<\infty$. Нетрудно видеть, что этот интеграл сходится абсолютно и равномерно и что он представляет собой решение уравнения (1) в полуплоскости $y>0$.

Формула (2) при $k=0$ обращается в интеграл Пуассона, решающий задачу Дирихле для уравнения Лапласа в случае полуплоскости $y>0$. Принимая во внимание, что уравнение (1) обращается в уравнение Лапласа при $k=0$, мы можем назвать формулу (2) обобщением интеграла Пуассона.

Докажем теперь, что функция $u(x,\ y)$ ограничена и что она стремится к $f(x)$ при $y\to 0$, если в точке x функция f непрерывна.

Формулу (2) мы можем записать еще так:

$$u(x,\ y)=\frac{1}{\Lambda}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x+\frac{y^{k+1}}{k+1}t\right)(1+t^2)^{-\frac{k+2}{2k+2}}dt. \tag{3}$$

Но, так как

$$\Lambda=\int_{-\infty}^{\infty}(1+t^2)^{-\frac{k+2}{2k+2}}dt=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2k+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+2}{2k+2}\right)}, \tag{4}$$

то из (3) сразу получим, что $|u(x,\ y)|\leqslant\max|f(x)|$, т. е. $u(x,\ y)$ ограничена в полуплоскости $y>0$.

Далее, из (3) в силу (4) получим

$$u(x,\ y)-f(x)=\frac{1}{\Lambda}\int_{0}^{\infty}\left[f\left(x+\frac{y^{k+1}}{k+1}t\right)+\right.$$

$$\left.+f\left(x-\frac{y^{k+1}}{k+1}t\right)-2f(x)\right](1+t^2)^{-\frac{k+2}{2k+2}}dt. \tag{5}$$

Пусть ε — любое фиксированное положительное число. Тогда существует такое положительное число $N(\varepsilon)$, которое зависит от ε, но не от $x,\ y$, что

$$\frac{1}{\Lambda}\left|\int_{N(\varepsilon)}^{\infty}\left[f\left(x+\frac{y^{k+1}}{k+1}t\right)+f\left(x-\frac{y^{k+1}}{k+1}t\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-2f(x)\right](1+t^2)^{-\frac{k+2}{2k+2}}dt\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{6}$$

Допустим теперь, что в точке x функция f непрерывна. Тогда существует такое число $\delta>0$, что

$$|f(x+h)-f(x)|<\varepsilon/2 \text{ при } |h|<\delta. \tag{7}$$

Очевидно, δ зависит, вообще, как от ε, так и от x.

Пусть $y^{k+1} < \frac{(k+1)\,\delta}{N(\varepsilon)} = \delta_0$. Тогда, в силу (7), при $0 \leqslant t \leqslant N(\varepsilon)$ будем иметь

$$\left| f\left(x + \frac{y^{k+1}}{k+1}\, t\right) + f\left(x - \frac{y^{k+1}}{k+1}\, t\right) - 2f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{8}$$

Представляя теперь интеграл (5) в виде суммы двух интегралов с пределами интегрирования 0, $N(\varepsilon)$ и $N(\varepsilon)$, ∞, на основании неравенств (6), (8) и формулы (4) легко найдем, что

$$|u(x,\ y) - f(x)| < \varepsilon \text{ при } y < \delta_0. \tag{9}$$

Отсюда сразу получим, что $u(x,\ y) \to f(x)$ при $y \to 0$, что и требовалось доказать.

Примечание 1. Если $f(x)$ равномерно непрерывна в интервале $(-\infty,\ \infty)$, то неравенство (9) будет выполняться равномерно относительно x. Следовательно, в этом случае при $y \to 0$ $u(x,\ y) \to f(x)$ равномерно относительно x.

Примечание 2. Если $f(x)$ — кусочно-постоянная функция, принимающая в интервалах $(-\infty,\ x_1)$, $(x_1,\ x_2), \ldots,$ $(x_n,\ \infty)$, $x_i < x_{i+1}$ постоянные значения $f_1, f_2, \ldots, f_n, f_{n+1}$, соответственно, то формула (2) примет вид

$$u(x,\ y) = f_1\,\Omega(x - x_1,\ y) + f_{n+1}\,[1 - \Omega(x - x_n,\ y)] + \\ + \sum_{k=2}^{n} f_k\,[\Omega(x - x_k,\ y) - \Omega(x - x_{k-1},\ y)].$$

Примечание 3. То, что формула (2) дает единственное решение задачи Дирихле для полуплоскости $y > 0$, легко вытекает из теоремы об единственности решения задачи Дирихле для эллиптических дифференциальных уравнений (см., например, ([1]), стр. 309).

Примечание 4. Формула (2), кроме самостоятельного интереса, имеет также важное применение при решении общей задачи Дирихле для уравнения (1). Особенно важным является решение общей задачи Дирихле для этого уравнения в том случае, когда граница области, лежащей целиком в полуплоскости $y > 0$, содержит отрезок оси $y = 0$. Формула (2) позволяет привести решение этой задачи к тому случаю, когда граничные значения искомого решения обращаются в нуль на упомянутом отрезке.

Ф. Франкль, который решил недавно эту общую задачу Дирихле ([2]), добивается такого приведения путем использования одного частного решения уравнения (1), принимающего вдоль отрезка оси $y = 0$ заданные значения, но выраженного при помощи бесконечного ряда (Ф. Франкль ограничивается рассмотрением случая $k = 0{,}5$). Кроме Ф. Франкля решением общей задачи Дирихле занимались также и другие авторы (см., например, ([3])).

Академия Наук Грузинской ССР
и Тбилисский государственный
университет имени И. В. Сталина

Поступило
11 XI 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, **2**, 1945. [2] Ф. Франкль, Изв. АН СССР, сер. мат., **10**, № 2 (1946). [3] F. Tricomi. Rend. Circ. Mat. Palermo, **52**, № 1 (1928).