Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LV, № 9

МЕХАНИКА

М. РОЗОВСКИЙ

ПЛАНЫ МОМЕНТОВ И ПЛАНЫ ОТНОШЕНИЙ МОМЕНТОВ РЕГУЛЯРНЫХ ЗУБЧАТЫХ МЕХАНИЗМОВ

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 11 X 1946)

Рассмотрим регулярный зубчатый механизм, который порождает между угловыми скоростями некоторых n своих основных звеньев k независимых соотношений. Обозначим эти звенья символами $1, 2, \ldots, n$, Обозначим, далее, моменты, подводимые извне к указанным звеньям, соответственно, символами $M_1, M_2, \ldots, M_n$.

Нетрудно показать, что связи, устанавливаемые рассматриваемым механизмом между моментами $M_1, M_2, \ldots, M_n$, могут быть записаны в виде системы уравнений:

$$\begin{aligned} M_1 &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \ldots + a_{1k}u_k, \\ M_2 &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{2k}u_k, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ M_n &= a_{n1}u_1 + a_{n2}u_2 + \ldots + a_{nk}u_k, \end{aligned} \tag{1}$$

где $u_1, u_2, \ldots, u_k$ — k независимых параметров, а $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nk}$ — постоянные коэффициенты, определяющиеся конструкцией механизма и выбором параметров $u_1, u_2, \ldots, u_k$ *.

Настоящая работа посвящена введению геометрических приемов, облегчающих рассмотрение связей между $M_1, M_2, \ldots, M_n$ для случаев $k = 2$ и $k = 3$.

1. Рассмотрим такой регулярный зубчатый механизм, у которого $k=2$. Система (1), после соответствующей смены обозначений, примет вид:

$$\begin{aligned} M_1 &= a_1 u + b_1 v, \\ M_2 &= a_2 u + b_1 v, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots \\ M_n &= a_n u + b_n v. \end{aligned} \tag{2}$$

Заметим, что за u и v можно принять, в частности, любые два линейно независимых между собою момента из числа $M_1, M_2, \ldots, M_n$.

Пусть некоторое звено p из числа рассматриваемых n звеньев является ведущим звеном механизма. Положим в дальнейшем $v = M_p$ и примем момент, подводимый извне к ведущему звену механизма,

* При этом предполагается, что рассматриваемый механизм уравновешен, что все его звенья имеют постоянные угловые скорости и что в механизме отсутствуют потери на трение.

за единицу при измерении моментов. Тогда система (2) примет вид:

$$\begin{aligned} M_1 &= a_1 u + b_1, \\ M_2 &= a_2 u + b_2, \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ M_n &= a_n u + b_n. \end{aligned} \tag{3}$$

Подобно тому как в работе (1) был введен план угловых скоростей для регулярного зубчатого механизма с двумя степенями свободы, введем для исследуемого случая план моментов.

Построим для этого, пользуясь уравнениями (3), в прямоугольной системе координат uOM графики всех рассматриваемых нами моментов. Каждый из этих графиков ($M = M_1$, $M = M_2, \dots, M = M_n$) является, очевидно, прямой линией.

Сделанный таким образом чертеж дает возможность по заданному моменту, подводимому извне к одному какому-либо из звеньев из числа $1, 2, \dots, p-1$, $p+1, \dots, n$, находить моменты, подводимые извне к остальным звеньям.

Чертеж показывает, между прочим, что при $k = 2$ все M_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ достигают своих экстремальных значений одновременно (эти экстремальные значения соответствуют экстремальным значениям параметра u).

2. Рассмотрим случай $k = 3$.

Система (1), после соответствующей смены обозначений, примет тогда вид:

$$\begin{aligned} M_1 &= a_1 u + b_1 v + c_1 w, \\ M_2 &= a_2 u + b_2 v + c_2 w, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\dots \\ M_n &= a_n u + b_n v + c_n w. \end{aligned} \tag{4}$$

Применяя метод, аналогичный методу, использованному в работе (2) для построения плана отношений угловых скоростей, введем здесь план отношений моментов.

Примем для этого u, v и w за однородные координаты проективной плоскости и, пользуясь декартовой системой координат xOy, будем изображать тройку чисел u, w и v точкой с координатами $x = \frac{u}{w}$, $y = \frac{v}{w}$.

Нетрудно указать следующие свойства полученного чертежа:

а) Каждой точке чертежа соответствует вполне определенное значение отношения любых двух моментов из числа $M_1, M_2, \dots, M_n$.

Для того чтобы определить значение $\frac{M_p}{M_q}$, соответствующее некоторой точке A, рассмотрим прямые $M_p = 0$ и $M_q = 0$ и их точку пересечения обозначим O_{pq}. Искомая величина отношения $\left.\frac{M_p}{M_q}\right|_A$ равна сложному отношению лучей $M_p = 0$, $M_q = 0$, $O_{pq}A$ и $M_p = M_q$.

б) Чертеж дает возможность по двум заданным отношениям вида $\frac{M_p}{M_q}$ (при условии, что по крайней мере какие-либо 3 из 4 моментов, входящих в эти два отношения, между собою линейно независимы) находить отношения между собою моментов остальных звеньев.

в) Некоторые две прямые $M_p = 0$ и $M_q = 0$ совпадают в том и только в том случае, когда механизм устанавливает постоянное отношение между моментами M_p и M_q.

г) Некоторые три прямые $M_p = 0$, $M_q = 0$ и $M_r = 0$ пересекаются в одной точке в том и только в том случае, когда механизм устанавливает линейную зависимость между моментами M_p, M_q и M_r.

д) Исходя из прямых $M_1 = 0$, $M_2 = 0, \ldots, M_n = 0$ и $M_1 = M_2$, $M_1 = M_3, \ldots, M_1 = M_n$, можно начертить любую из прямых $M_p = M_q$ ($p, q = 1, 2, \ldots, n$; $p \neq q$).

Изложенные выше геометрические приемы в ряде случаев значительно облегчают исследование регулярных зубчатых механизмов.

Они могут быть распространены и на механизмы с $k > 3$. Однако в этом случае возникают осложнения, связанные с использованием пространственного чертежа.

Поступило
11 X 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Крейнес и М. Розовский, ДАН, 47, № 6 (1945). [2] М. Крейнес, ДАН, 48, № 3 (1945).