Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LV, № 9

МЕХАНИКА

Е. ЕГЕРВАРИ

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ РЕШЕНИЯ ЛАГРАНЖА ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 12 VI 1946)

Лагранж и другие авторы нашли все решения задачи трех тел, в которых отношения взаимных расстояний остаются постоянными. В этой статье сообщаются частные решения плоской задачи трех тел, в которых отношение главных моментов инерции системы остается постоянным. Такие решения существуют, если массы равны и потенциал зависит только от главных моментов инерции, другими словами, зависит от момента инерции около центра тяжести и от площади треугольника масс.

Предполагая, что центр тяжести системы совпадает с полюсом системы координат, конфигурация системы определяется посредством общих координат S, D, σ, δ, связанных с комплексными координатами масс $z_k=x_k+iy_k$ ($k=0, 1, 2$) посредством уравнений

$$\sqrt{3}\, z_k=Se^{i\left(\sigma+\frac{2k\pi}{3}\right)}+De^{i\left(\delta-\frac{2k\pi}{3}\right)} \quad (k=0,\,1,\,2). \tag{1}$$

Этот выбор координат дает следующее выражение живой силы

$$2T=\Sigma\,|\dot{z}_k|^2=\dot{S}^2+\dot{D}^2+S^2\dot{\sigma}^2+D^2\dot{\delta}^2. \tag{2}$$

Момент инерции системы около центра тяжести есть

$$J=\Sigma\,|z_k|^2=S^2+D^2, \tag{3}$$

и площадь треугольника масс

$$\Delta=\frac{i}{4}\,\Sigma z_0\,(\bar{z}_1-\bar{z}_2)=\frac{\sqrt{3}}{4}(S^2-D^2). \tag{4}$$

Таким образом, потенциал V зависит от S и D:

$$V=V(J,\,\Delta)=W(S,\;D). \tag{5}$$

Уравнения Лагранжа суть

$$\begin{aligned} &\ddot{S}-S\,\dot{\sigma}^2=-\frac{\partial W}{dS}; \qquad \frac{d}{dt}(S^2\dot{\sigma})=0;\\ &\ddot{D}-D\dot{\delta}^2=-\frac{\partial W}{\partial D}; \quad \frac{d}{dt}(D^2\dot{\delta})=0. \end{aligned} \tag{6}$$

Исключив $\dot{\sigma}$ и $\dot{\delta}$ посредством интегралов

$$S^2\dot{\sigma} = C_1; \qquad D^2\dot{\delta} = C_2, \tag{7}$$

получим систему 4-го порядка

$$\ddot{S} - \frac{C_1^2}{S^3} = -\frac{\partial W}{\partial S}; \quad \ddot{D} - \frac{C_2^2}{D^3} = -\frac{\partial W}{\partial D}. \tag{8}$$

Использовав интеграл живых сил

$$\dot{S}^2 + \dot{D}^2 + S^2\dot{\sigma}^2 + D^2\dot{\delta}^2 + 2W(S, D) = 2C_0 \tag{9}$$

и исключая время, приведем эту систему к системе 2-го порядка.

После интегрирования этой системы неизвестные переменные σ и δ определяются квадратурами

$$\sigma = \sigma_0 + C_1\int\frac{dt}{S^2}; \quad \delta = \delta_0 + C_2\int\frac{dt}{D^2}. \tag{10}$$

Легко дать иллюстрацию полученного решения.

Рассмотрим два концентрических и равносторонних треугольника Δ' и Δ'', пусть $\sqrt{3}\,S$ и $\sqrt{3}\,D$ обозначают длины их сторон, а $\dot{\sigma}$ и $\dot{\delta}$ — их угловые скорости. Тогда геометрическая сумма этих двух вращающихся и расширяющихся треугольников составляет решение задачи.

Все решения, в которых $D/S = q = \text{const}$, получим в квадратурах.

I. Если $0 < q < 1$, то равенство

$$W_D'(S, qS) : W_S'(S, qS) = q$$

должно быть удовлетворено. В этом случае уравнения (8) приводятся (избирая соответственно постоянные C_1, C_2) к равенству

$$\ddot{S} - \frac{C^2}{S^3} = -W_S'(S, qS), \tag{11}$$

имеющему интеграл

$$t = t_0 + \int\frac{S\,dS}{\sqrt{2(1+q^2)^{-1}\left\{C_0 - W(S, qS)\right\}S^2 - C^2}}. \tag{12}$$

II. Если $q = 0$, то $D = 0$. В этом случае один из треугольников исчезнет, и мы получим эквидистантные точки Лагранжа:

$$\sqrt{3}\,z_k = S(t)\,e^{i\left(\sigma(t) + \frac{2k\pi}{3}\right)} \qquad (k = 0, 1, 2). \tag{13}$$

$S(t)$ и $\sigma(t)$ определяются равенствами (12) и (10).

III. Если $q = 1$, то равенства $W_S'(S, S) = W_D'(S, S)$ и $C_1 = \pm C_2$ должны быть удовлетворены.

В случае $C_1 = C_2$ имеем $\dot{\sigma} = \dot{\delta}$, следовательно, симметрические треугольники Δ' и Δ'' вращаются с равными угловыми скоростями, и мы получим коллинеарные точки Лагранжа:

$$\sqrt{3}\,z_k = 2S(t)\cos\left(\frac{2k\pi}{3} + \delta_1\right)e^{i\{\sigma(t) + \sigma_1\}}. \tag{14}$$

В случае $C_1 = -C_2$ имеем $\dot{\sigma} = -\dot{\delta}$, следовательно, симметрические треугольники Δ' и Δ'' вращаются с противоположными угловыми скоростями, и мы получим прямолинейное движение точек:

$$\sqrt{3}\, z_k = 2S(t) \cos\left\{\frac{2k\pi}{3} + \sigma(t) + \sigma_1\right\} e^{i\delta_1}. \tag{15}$$

В обоих случаях $S(t)$ и $\sigma(t)$ определяются равенствами (12) и (10).

Новое частное решение (при $W = \Sigma r_k^4$), открытое Соколовым [1], принадлежит к этому типу.

IV. Другое частное решение находится при предположении равенств $S = S_0 = \text{const}$ и $D = D_0 = \text{const}$. Тогда C_1, C_2, S_0, D_0 должны удовлетворять равенствам

$$S_0^3 W_S'(S_0, D_0) = C_1^2; \quad D_0^3 W'_D(S_0, D_0) = C_2^2, \tag{16}$$

и σ, δ имеют вид

$$\sigma = \sigma_0 + \frac{C_1}{S_0^2} t; \quad \delta = \delta_0 + \frac{C_2}{D_0^2} t.$$

В этом случае движение тел можно представлять тремя точками, скрепленными с тремя равными кругами, имеющими эквидистантные центры и катящимися равномерно по неподвижному кругу.

Предположение $W = \Sigma r_k^4$ дает в этом случае пример периодического движения трех тел, притягивающихся центральными силами, в котором треугольник масс не остается ни равнобедренным, ни подобным себе.

Наконец, мы рассмотрим случай, в котором потенциал, зависящий от любой степени расстояния, выражается как функция момента инерции и площади треугольника масс.

Детерминант Якоби

$$\frac{\partial(\Sigma r_k^\alpha, J, \Delta)}{\partial(r_0, r_1, r_2)}$$

исчезает только в тех случаях, когда:

1) $\alpha = 2$ (случай упругих сил)

$$\sum r_k^2 = 3J;$$

2) $\alpha = 4$ (частное решение Соколова и автора)

$$\sum r_k^4 = \frac{1}{2}(9J^2 - 16\Delta^2).$$

Таким образом, мы доказали, что потенциальная функция, входящая в решение Соколова, — единственный потенциал, принадлежащей категории, исследованной в этой статье.

Поступило
12 VI 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. Д. Соколов, ДАН, 46, № 3 (1945).