Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LV, № 9

МАТЕМАТИКА

Ш. Е. МИКЕЛАДЗЕ

РАЗРЫВНЫЕ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(*Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 10 X 1946*)

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$L(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + X_n y = 0. \tag{1}$$

Примем, что коэффициенты $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — однозначные функции x в конечном промежутке $(0, l)$. Пусть, кроме того, эти функции непрерывны для всех вещественных значений x в промежутке $(0, l)$, включая и его концы.

Уравнение (1) допускает интеграл, непрерывный в промежутке $(0, l)$ вместе со своими $n-1$ первыми производными, удовлетворяющий начальным условиям. Для граничных проблем уравнение (1) вообще не допускает решения, непрерывного вместе со своими первыми $n-1$ производными в промежутке $(0, l)$. Ниже мы будем искать решения граничных задач для уравнения (1) среди разрывных функций с прерывными производными.

Пусть ищется решение уравнения (1) с числом граничных условий, равным порядку уравнения n. Пусть граничные условия имеют вид:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{ki} y^{(k)}(0) + \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{ki} y^{(k)}(l) = \gamma_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

где α, β и γ — заданные постоянные.

Имеет место следующая теорема о решениях уравнения $L(y) = 0$:

Теорема 1. *Если $Y_1(x)$, $Y_2(x), \ldots, Y_n(x)$ образуют нормальную фундаментальную последовательность решений уравнения $L(y) = 0$, то общее решение этого уравнения дается формулой*

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} y^{(k)}(0) Y_{k+1}(x) + \sum_m A_m Y_1(x - a_m) + \\ + \sum_r B_r Y_2(x - a_r) + \ldots + \sum_\mu Q_\mu Y_n(x - a_\mu), \tag{3}$$

где $a_m, a_r, \ldots, a_\mu$ — точки разрывов (первого рода) и $A_m, B_r, \ldots, \ldots, Q_\mu$ — скачки функций $y(x)$, $y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)$ в промежутке $(0, x)$.

Для доказательства этой теоремы мы сначала рассмотрим две точки промежутка $(0, l)$: 0 и $a < l$. Пусть $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — два различные решения уравнения $L(y) = 0$, удовлетворяющие наперед заданным начальным условиям, соответственно, в точках $x = 0$ и $x = a$.

Пусть $A, B, \ldots, Q$, соответственно, значения разности $u_2 - u_1$ и ее $n-1$ последовательных производных в точке a. Тогда $u_2 - u_1$ будет непрерывным интегралом уравнения (1), удовлетворяющим начальным условиям $(a, A, B, \ldots, Q)$.

Теперь мы можем выписать разрывный интеграл уравнения (1), определенный в промежутке $(0, l)$ начальными условиями $(0, y(0), y'(0), \ldots, y^{(n-1)}(0))$ и скачками $(A, B, \ldots, Q)$ функций $y^{(k)}(x)$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ при $x = a$.

Имеем:

$$u_1(x) = y(0)\, Y_1(x) + y'(0)\, Y_2(x) + \ldots + y^{(n-1)}(0)\, Y_n(x),$$

$$u_2(x) = u_1(x) + AY_1(x-a) + BY_2(x-a) + \ldots + QY_n(x-a).$$

Правая часть последнего равенства будет давать и $u_1(x)$ и $u_2(x)$, если мы, выходя из точки 0 и перемещая переменное x по оси абсцисс в сторону точки $x = l$, положим вдоль этого пути скачки $A, B, \ldots, Q$ равными нулю при $0 \leqslant x \leqslant a$ и отличными от нуля для $a < x \leqslant l$ для тех функций $y^{(k)}(x)$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, которые в действительности имеют разрывы в точке $x = a$.

Пусть переменное x описывает отрезок l, выходящий из точки 0. Если при этом мы встретим по пути новую точку b между точками a и l, обозначим через $u_3(x)$ решение уравнения $L(y) = 0$, не совпадающие ни с $u_1(x)$, ни с $u_2(x)$, удовлетворяющее наперед заданным начальным условиям в точке $x = b$, и затем, аналогично изложенному выше, выпишем разрывный интеграл, определенный в промежутке $(0, l)$ начальными условиями $(0, y(0), y'(0), \ldots, y^{(n-1)}(0))$ и скачками функций $y^{(k)}(x)$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ в точках $x = a$ и $x = b$.

Продолжая таким образом, мы, в конце концов, придем к общему разрывному интегралу уравнения (1), имеющему вид (3).

Если с помощью уравнения (3) мы выразим $y^{(k)}(l)$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ через значения $y^{(k)}(0)$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ и присоединим к полученным соотношениям граничные условия (2), то придем к системе линейных алгебраических уравнений относительно $y^{(k)}(0)$ и $y^{(k)}(l)$. В случае совместности этой системы мы сумеем вычислить величины $y^{(k)}(0)$, подставим их в (3) и, таким образом, найдем решение нашей краевой задачи.

Перейдем теперь к исследованию неоднородных линейных уравнений

$$L(y) = y^{(n)} + X_1 y^{(n-1)} + \ldots + X_n y = q(x), \tag{4}$$

где $q(x)$ — непрерывна для всех значений x в конечном промежутке $(0, l)$, включая его концы, за исключением конечного числа точек, в которых она может иметь разрывы первого рода.

Очевидно, что общий (разрывный) интеграл уравнения (4) получится путем прибавления к правой части (3) частного интеграла уравнения (4) с нулевыми начальными условиями. Обозначим этот частный интеграл через $u(x)$.

Имеет место следующая теорема о нахождении частного интеграла уравнения (4) с нулевыми начальными условиями.

Теорема 2. *Если известна нормальная фундаментальная система решений $Y_1(x), Y_2(x), \ldots, Y_n(x)$ однородного уравнения*

$L(y)=0$, *то частное решение неоднородного уравнения* $L(y)=qx$, *удовлетворяющее нулевым начальным условиям, равно*

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n+i}\,Y_i(x)\int_0^x \Delta_i e^{\int_0^x X_1dx}\,q(x)\,dx,$$

где Δ_i — *минор, соответствующий элементу последней строки и* i*-го столбца детерминанта Вронского.*

Для доказательства этой теоремы достаточно удостовериться, что метод вариации произвольных постоянных дает

$$u(x)=\sum_{i=1}^{n}Y_i(x)\,u^{(i-1)}(0)+\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n+i}\,Y_i(x)\int_0^x \Delta_i e^{\int_0^x X_1dx}\,q(x)\,dx.$$

Можно показать, что наш метод интегрирования дифференциального уравнения (4) применим и тогда, когда коэффициенты уравнения — однозначные функции x с конечным числом разрывов первого рода в промежутке $(0,\ l)$.

Нахождение частного интеграла с нулевыми начальными условиями особенно упрощается в случае линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Нетрудно доказать, что имеет место теорема:

Теорема 3. *Частный интеграл неоднородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, удовлетворяющий нулевым начальным условиям, равен*

$$u(x)=\int_0^x Y_n(x-t)\,q(t)\,dt.$$

В справедливости этой теоремы легко убедиться, подставив $u(x)$ вместе с ее n последовательными производными в данное дифференциальное уравнение.

Для примера рассмотрим дифференциальное уравнение упругой линии сжато-изогнутой горизонтальной балки:

$$\frac{d^4y}{dx^4}+\alpha^2\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{q(x)}{EJ}\qquad\left(\alpha^2=\frac{S}{EJ}\right),$$

где S — продольная сжимающая сила, приложенная в центре тяжести опорного сечения балки, EJ — постоянная жесткость при изгибе, $q(x)$ — интенсивность поперечной (вертикальной) нагрузки. Пусть балка нагружена, кроме сплошной нагрузки, еще сосредоточенными моментами m_k (в сечениях $x=a_k$) и сосредоточенными силами P_ν (в сечениях $x=a_\nu$).

Нормальная фундаментальная система однородного уравнения имеет вид:

$$Y_1=1,\quad Y_2=X,\quad Y_3=\frac{1-\cos\alpha x}{\alpha^2},\quad Y_4=\frac{\alpha x-\sin\alpha x}{\alpha^3}.$$

Частный интеграл с нулевыми начальными условиями равен

$$\frac{1}{\alpha^3}\int_0^x[\alpha(x-t)-\sin\alpha(x-t)]\,\frac{q(t)}{EJ}\,dt.$$

Пусть A_m — скачок упругой линии в точке a_m, B_r — скачок поворота в точке a_r. Легко удостовериться, что $y''(x)$ имеет скачки в точках a_k и a_m. Эти скачки равны, соответственно, m_k/EJ и SA_m/EJ. Кроме того, $y'''(x)$ имеет в точках a_ν и a_r скачки, равные P_ν/EJ и SB_r/EJ.

Следовательно,

$$EJy(x) = EJ\left\{y(0) + xy'(0) + \frac{1-\cos\alpha x}{\alpha^2}y''(0) + \frac{\alpha x - \sin\alpha x}{\alpha^3}y'''(0) + \right.$$

$$+ \sum_m A_m[2-\cos\alpha(x-a_m)] + \left.\sum_r B_r\left[2(x-a_r) - \frac{\sin\alpha(x-a_r)}{\alpha}\right]\right\} +$$

$$+ \sum_k \frac{m_k}{\alpha^2}[1-\cos\alpha(x-a_k)] + \sum_\nu \frac{P_\nu}{\alpha^3}[\alpha(x-a_\nu) - \sin\alpha(x-a_\nu)] +$$

$$+ \frac{1}{\alpha^3}\int_0^x[\alpha(x-t) - \sin\alpha(x-t)]\,q(t)\,dt. \qquad (5)$$

Суммирование распространяется на все индексы m, r, k и ν, для которых точки a_m, a_r, a_k и a_ν лежат в промежутке $(0, x)$. Направления P_ν и $q(x)$ вверх и m_k по часовой стрелке считаются положительными.

Уравнение (5) есть общее уравнение упругой линии сжато-изогнутой балки. Неизвестные $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$ и $y'''(0)$ определяются из граничных условий. Путем предельного перехода при $\alpha\to 0$ из общей формулы (5) мы получим общее уравнение упругой линии балки, нагруженной только вертикальной нагрузкой.

Поступило
10 X 1946