Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LV, № 9

МАТЕМАТИКА

Академик Н. М. КРЫЛОВ

О КВАТЕРНИОНАХ РОАНА ГАМИЛЬТОНА И ПОНЯТИИ МОНОГЕННОСТИ

В 1945 г. в трудах Ирландской Академии Наук ([1]), посвященных юбилейным торжествам столетия открытия кватернионов, изложены различные приемы, следуя которым можно было бы притти к понятию кватернионов, знаменующих собою поворотный этап в деле создания новых алгебр, столь важных для современных исследований в области новейшей физики, например для квантовой теории.

Обобщая путь, предуказанный Вейерштрассом ([2]) для получения известных условий Коши — Римана в теории функций мнимой переменной, целью настоящей заметки является показать, что, принимая кватернионный закон умножения мнимых символов i, j, k, и для кватернионной зависимости сохраняется то основное свойство определителя, которое имеет место для обычной функции комплексной переменной $\varphi + i\psi = f(u + iv)$, а именно

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 = \left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2, \qquad (1)$$

т. е. суммы квадратов по горизонталям и вертикалям определителя

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

равны на основании условий Коши — Римана

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v} = -\frac{\partial\psi}{\partial u}; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial u} = \frac{\partial\varphi}{\partial v}. \qquad (3)$$

Таким образом, кватернионы среди функций гиперкомплексных величин являются естественным обобщением обычной функции комплексной переменной, и этот путь представляется нам наиболее прямым для установления понятия кватерниона и до сих пор, кажется, не отмеченным.

Итак, пусть

$$v = f(r) = \varphi + i\psi + j\mu + k\eta, \qquad (4)$$

где

$$r = t + ix + jy + kz,$$

а таблица умножения мнимых символов i, j, k определяется на основании ранее указанного. Замечаем прежде всего, что увеличение на вещественное Δt дает

$$f(r+\Delta t)-f(r)=\Delta t\, f'(r)+\ldots,$$

и равным образом увеличение r на мнимые $i\Delta x$, $j\Delta y$, $k\Delta z$ приводит к формулам

$$f(r+i\Delta x)-f(r)=i\Delta x\, f'(r)+\ldots,$$
$$f(r+j\Delta y)-f(r)=j\Delta y\, f'(r)+\ldots,$$
$$f(r+k\Delta z)-f(r)=k\Delta z\, f'(r)+\ldots,$$

откуда, переходя к пределу $\Delta t\to 0$, $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$, $\Delta z\to 0$, получаем

$$\frac{\partial v}{\partial t}=f'(r),\quad \frac{\partial v}{\partial x}=i\,f'(r),\quad \frac{\partial v}{\partial y}=j\,f'(r),\quad \frac{\partial v}{\partial z}=k\,f'(r) \tag{5}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial v}{\partial x}=i\,\frac{\partial v}{\partial t},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=j\,\frac{\partial v}{\partial t},\quad \frac{\partial v}{\partial z}=k\,\frac{\partial v}{\partial t}. \tag{6}$$

Уравнения (6) представляют естественное обобщение того уравнения, которое Риман принял, как известно, за определение аналитической зависимости для случая функций обычной мнимой переменной.

Исходя теперь из соотношений (5), (6) и приняв кватернионную таблицу умножения мнимых i, j, k, мы тотчас получаем систему уравнений, обобщающих условия Коши — Римана в теории функций мнимой переменной, причем, как легко убедиться, система эта будет такова, что матрица

$$\left|\begin{matrix} \frac{\partial\varphi}{\partial t} & \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial\psi}{\partial t} & \frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial y} & \frac{\partial\psi}{\partial z} \\ \frac{\partial\mu}{\partial t} & \frac{\partial\mu}{\partial x} & \frac{\partial\mu}{\partial y} & \frac{\partial\mu}{\partial z} \\ \frac{\partial\eta}{\partial t} & \frac{\partial\eta}{\partial x} & \frac{\partial\eta}{\partial y} & \frac{\partial\eta}{\partial z} \end{matrix}\right|$$

будет кватернионной, т. е. суммы квадратов ее членов по вертикалям и горизонталям будут равны. Это любопытное свойство имеет место, как уже было выше замечено, для случая функций комплексной переменной, вероятно, им обладает также матрица, соответствующая случаю так называемых „седенионов", алгебра которых может быть описана как квадрат кватернионной алгебры и является адекватной, по мнению А. Еддингтона ([3]), для представления структуры внешнего мира.

Поступило
25 I 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Proc. Roy. Irish. Ac., **50**, A, No. 6 (1945). [2] C. Weierstrass, Acta Math., **45**, 9 (1925). [3] E. Whittaker, Math. Gazette, X, 142 (1945).