Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LV, № 9

МАТЕМАТИКА

И. А. ВИЛЬНЕР

О НОМОГРАММАХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ИНТЕГРАЛОВ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 2 X 1946)

1. Бесконечное многообразие форм аналитических зависимостей первого номографического класса представлено формами, перечисленными в работе автора ([1]). Эти последние формы мы будем называть нормальными формами зависимостей первого класса, к номографированию которых, таким образом, приводится задача номографирования любой зависимости первого класса.

Сохраняя здесь и в дальнейшем обозначения, принятые в работе ([1]), можем, в силу теоремы 1, утверждать, что вторая нормальная форма неэлементарных зависимостей первого класса

$$w - w_0 = \frac{Nk}{1+i} \int\limits_0^{\gamma(z-z_0)} \frac{d\xi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\xi}}, \qquad |k'|=1, \quad \overline{k} = \pm\frac{ik}{k'} \tag{1,1}$$

имеет применения так же часто (примеры 1, 2), как и первая, несмотря на ограничение, наложенное на комплексный модуль (1,1).

Пусть

$$f = \sqrt{\wp\,[\gamma(w-w_0); g_2; \overline{g_3}] - e_k}, \quad f = \sqrt{\frac{\wp - e_i}{\wp - e_j}}$$

($\wp$ — функция Вейерштрасса; $f = L[\gamma(w-w_0); k]$, где L есть sn, cn, dn, ns, ..., sc (обозначения Glaischer'а); $f = \xi_{ij}$ $(i \neq j = 0, 1, 2, 3)$ (функции Tannery и Molk'а ([2])).

Теорема 1. *Аналитические зависимости* $z - z_0 = M\int f dw$ и $z - z_0 = M \ln f$ *суть зависимости первого класса, номографирование которых приводится к номографированию одной из двух нормальных форм неэлементарных зависимостей первого класса.*

Доказательство. Перейдя к функциям Якоби $L(w; k)$ в предположении модуля k с действительным квадратом, обозначим $\tau = -\frac{\operatorname{Re} L(w;k)}{\operatorname{Im} L(w;k)}$ ([3]). Воспользовавшись теоремами сложения для функций sn $(w; k)$, cn $(w; k)$, dn $(w; k)$ и известными тождествами Якоби для разложения в суммы попарных произведений этих функций в применении к комплексно-сопряженным аргументам, получим $\frac{\partial^2 \ln \tau}{\partial p \partial q} = 0$ ([3]).

В случае комплексного модуля доказательство осложняется модулярными преобразованиями первой и второй степени.

П р и м е р 1. $z - z_0' = N' \ln[\wp((w - w_0'); g_2; g_3) - e_2]$ при $g_2^3 - 27g_3^2 > 0$, $e_1 > e_2 > e_3$ приводится к (1,1) (см. формулы (3,1)), причем $\gamma = \frac{i}{2N'}$, $M = \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{e_1 - e_3}}(k_1' + \varepsilon_3 i k_1)$, $k = 2\sqrt{-\varepsilon_3 i k_1 k_1'}\,(k_1' + \varepsilon_3 i k_1)$, $z_0 = z_0' + N' \ln(\varepsilon_3 i \sqrt{(e_1 - e_2)(e_2 - e_3)})$, $w_0 = w_0' + \varepsilon_4 \frac{\omega_1 - \varepsilon_3\omega_3}{2} + 2m\omega_1 + 2m\omega_3$, где $k_1 = \sqrt{\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}}$, $k_1' = \sqrt{\frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}}$, $\varepsilon_{2,3,4,} = \pm 1$, причем знак $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 / \varepsilon_4$ должен быть определенным, M — весь множитель перед знаком интеграла (1,1), $\omega_1 = \frac{K(k_1)}{\sqrt{e_1 - e_3}}$, $\omega_3 = \frac{iK'(k_1)}{\sqrt{e_1 - e_3}}$.

П р и м е р 2. Зависимость примера 1 при $g_3 = 0$, $e_1 = -e_3 = \sqrt{g_2}/2$ приводится к (1,1) (см. формулы (3,2)), причем $k = \sqrt{2}$, $k_1 = k_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\omega_1 = -i\omega_3 = \frac{K(1/\sqrt{2})}{\sqrt{2e_1}} = \frac{[\Gamma(1/4)]^2}{4\sqrt{2\pi e_1}} = \frac{1{,}31102878\ldots}{\sqrt{e_1}}$ и т. д.

С л е д с т в и е. Все перечисленные функции f номографируемы в полярных координатах, т. е. существуют номограммы зависимостей $re^{i\theta} = \sigma_0 f$.

Отметим, что теорема 1 и следствие дают, если не исключать случаев вырождения ($k = 0$, $k = 1$) и все номографируемые элементарные зависимости первого класса; например $z = \sin w$ есть предельная зависимость для $z = -\int \mathrm{cn}(w; k)\, dw$ (но не для зависимости $z = \mathrm{sn}(w; k)$!) и т. д.

Полагая в соотношении примера 1 и в соответствующей этому соотношению зависимости (1,1) $w - w_0' = \varepsilon_4(\omega_1 - \varepsilon_3\omega_3)$, получим формулу для преобразования полного эллиптического интеграла от комплексного модуля, лежащего на единичном круге: $K((k_1' + \varepsilon_3 i k_1)^2) = \frac{1}{2}\frac{K(k_1) + \varepsilon_3 i K'(k_1)}{k_1 - \varepsilon_3 i k_1'}$ или $K(e^{2\varepsilon i\varphi}) = \frac{e^{-\varepsilon i\varphi}}{2}[K(\cos\varphi) + \varepsilon i K(\sin\varphi)]$ и подобные соотношения.

Опуская случаи $k = 0, 1$, все 12 функций $L\left[\frac{w - w_l}{M}, k\right]$ можно выразить через $\mathrm{dn}[u; \lambda]$. Поэтому достаточно показать, как номографируется в полярных координатах последняя функция. Обращая, можем представить первую и вторую неэлементарные нормальные формы так:

$$z - z_0 = \frac{1}{\gamma}\int_0^{\frac{w - w_l}{M}} \mathrm{dn}[\xi; k]\, d\xi,$$

где M — весь множитель перед интегралами в неэлементарных нормальных формах. Зависимость $z - z_0 = \frac{1}{\gamma}\ln \mathrm{dn}\left[\frac{w - w_0}{M}; k\right]$ приводится к этому виду; получим $i(z - z_0)\gamma \pm \frac{i}{2}\ln k' + \frac{\pi}{2} = \int_0^v \mathrm{dn}\left[\sigma; \frac{2\sqrt{k'}}{1 + k'}\right] d\sigma$, где $v = i(1 + k')\frac{w - w_l}{M} + (1 + k')K'(k) + i\frac{1 + k'}{2}K(k)$.

2. Обозначим через A функцию аргумента $u = \frac{2\sqrt{2}}{k_1|k|}\mathrm{Re}\left(\frac{w - w_0}{N}\omega\right)$ и модуля $m = k_1$; через B — аргумента $u = \frac{2k_1' i\sqrt{2}}{k_1|k|}\mathrm{Im}\left(\frac{w - w_0}{N}\omega\right)$ и модуля $m = \frac{k_1 i}{k_1'}$; через $\breve{A}$ — аргумента $u = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\frac{w - w_0}{N}$ и модуля $m = \sqrt{2}$; через $\breve{B}$ — аргумента $u = \sqrt{2}\,\mathrm{Im}\frac{w - w_0}{N}$ и модуля $m = \sqrt{2}$.

Буквы с индексом 1 обозначают sn, с индексом 2 — cn, с индексом 3 — dn, причем модули k и k' эллиптического интеграла (1,1) связаны с модулями k_1 и k_1' и с действительной или чисто мнимой единицей ω соотношениями:

$$k^2 + k'^2 = 1, \quad k_1 = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}, \quad k_1' = \frac{1-k'}{1+k'},$$
$$k_1^2 + k_1'^2 = 1, \quad \omega = \frac{k_1 |k| (1+k')(1-i)}{2k\sqrt{2}}. \tag{2,1}$$

Модуль k эллиптического интеграла (1,1) в плоскости комплексного переменного $k = k_2 + ik_3$ изображается точками лемнискаты Бернулли $(k_2^2 + k_3^2)^2 - 2(k_2^2 - k_3^2) = 0$ и, следовательно, принимает, с точностью до знака, только одно отличное от нуля вещественное значение:

$$k = \sqrt{2}, \quad k' = i, \quad k_1 = \sqrt{2}, \quad k_1' = -i, \quad \omega = 1. \tag{2,2}$$

Таким образом, эллиптический интеграл $w - w_0 = M \int\limits_0^{\gamma(z-z_0)} \frac{d\xi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\xi}}$ только при условии (2,2) допускает два значения коэффициента M: $M = N$ и $M = \frac{N}{1+i}$, при которых получаем зависимость первого класса между z и w.

Отметим, что модуль эллиптического интеграла (1,1) k и модули k', k_1 и k_1' (2,1) могут быть записаны в функции вещественного параметра α в виде:

$$k = \frac{\sqrt{2}}{\operatorname{ch}\alpha + i\operatorname{sh}\alpha}, \quad k' = i\frac{\operatorname{ch}\alpha - i\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha + i\operatorname{sh}\alpha},$$
$$k_1 = \frac{\sqrt{2\operatorname{ch}2\alpha}}{\operatorname{ch}\alpha + \operatorname{sh}\alpha}, \quad k_1' = -i\frac{\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha + \operatorname{sh}\alpha}, \quad \omega = 1. \tag{2,3}$$

3. Теорема 2. *Канонические представления зависимости* (1,1) *в общем случае и при условии* (2,2) *могут быть даны, соответственно, в виде*:

$$\left.\begin{aligned}
&(ik_1')\,\{\sin 2\operatorname{Re}[\gamma(z-z_0)]\} + (A_3^2)\,\{\operatorname{sh} 2\operatorname{Im}[\gamma(z-z_0)]\} + \\
&\qquad + (-k_1^2 A_1 A_2) = 0, \\
&(+1)\,\{\sin 2\operatorname{Re}[\gamma(z-z_0)]\} + (-ik_1' B_3^2)\,\{\operatorname{sh} 2\operatorname{Im}[\gamma(z-z_0)]\} + \\
&\qquad + \left(-\frac{ik_1^2}{k_1'} B_1 B_2\right) = 0;
\end{aligned}\right\} \tag{3,1}$$

$$\left.\begin{aligned}
&(+1)\,\{\sin 2\operatorname{Re}[\gamma(z-z_0)]\} + (\breve{A}_3^2)\,\{\operatorname{sh} 2\operatorname{Im}[\gamma(z-z_0)]\} + \\
&\qquad + (-2\breve{A}_1\breve{A}_2) = 0, \\
&(+1)\,\{\sin 2\operatorname{Re}[\gamma(z-z_0)]\} + (\breve{B}_3^2)\,\{\operatorname{sh} 2\operatorname{Im}[\gamma(z-z_0)]\} + \\
&\qquad + (2\breve{B}_1\breve{B}_2) = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{3,2}$$

4. Теорема 3. *Параметрические и декартовы уравнения, определяющие с точностью до коллинеации номограмму* (1,1), *имеют вид*

$$
\left.
\begin{array}{c}
X_{(1)} = \dfrac{1}{\sin 2\,\mathrm{Re}\,[\gamma(z-z_0)]}, \quad Y_1 = 0, \quad X_{(2)} = 0, \\
Y_{(2)} = \dfrac{1}{\mathrm{sh}\,2\,\mathrm{Im}\,[\gamma(z-z_0)]}, \\
X_{(3)} = \dfrac{ik_1'}{k_1' A_1 A_2}, \quad Y_{(3)} = \dfrac{A^2{}_3}{k_1^2 A_1 A_2}, \quad X_{(4)} = \dfrac{-ik_1'}{k_1^3 B_1 B_2}, \quad Y_{(4)} = \dfrac{-k_1'^2 B_3^2}{k_1^2 B_1 B_2}, \\
X^2_{(3),(4)} - Y^2_{(3),(4)} - \dfrac{i}{k_1'}(1 + k_1'^2) X_{(3),(4)} Y_{(3),(4)} - 1 = 0.
\end{array}
\right\} \quad (4,1)
$$

Теорема 4. *Эллиптический интеграл* (1,1) *при фиксированных N и γ и переменном модуле k изображается единственной, с точностью до коллинеации, номограммой на двух общих прямолинейных шкалах* (a), (b) *и с однопараметрическим (параметр — модуль k или α) семейством — пучком конических* ([3]) *сечений с двумя действительными и двумя комплексно-сопряженными базисными точками, лежащими попарно на шкалах* (a), (b); *аналогичное имеет место для эллиптического интеграла с некомплексным модулем* ([1]), *но в этом случае пучок конических сечений обладает 4 действительными базисными точками, попарно расположенными на шкалах* (a), (b) (*и* (p), (q) *при* $k = 1$).

Аналогично, для функции Вейерштрасса, рассмотренной в примере 1, получим пучок конических номограмм, если при постоянных z_0' и N' при изменении инвариантов g_2 и g_3 J-дискриминант $\Delta = 16(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)$ сохраняет постоянное значение.

5. Приведем примеры зависимостей второго класса четвертого жанра, номографируемых на двух конических сечениях, основываясь на § 1—4 работы ([1]).

$$1^\circ.\ \mathrm{amp}\,[w_{k_1};\, k_1] = n\pi + \frac{\delta\pi}{2}\pi \pm \mathrm{amp}\,[w_{k_2};\, k_2],$$

где $\delta = 0, 1$ и k_1, k_2 удовлетворяют требованиям соответственных неэлементарных нормальных форм. В случаях вырождения получим предельные зависимости второго жанра ($k_1 = 1, 2$; $k_2 \neq 0, 1$) или нулевого жанра ($k_1 = 0, 1$; $k_2 = 0, 1$), ($k_1 = k_2$ при $\delta = 0$).

$$2^\circ.\quad \gamma_{10}(w_1 - w_{10})^2 + \alpha_{10} = \gamma_{20}(w_2 - w_{20})^2 + \alpha_{20},$$

γ_{10} и $\gamma_{20} \neq 0$, $\alpha_{10} \neq \alpha_{20}$ и все постоянные α и γ одновременно действительные или чисто мнимые.

$$3^\circ.\ \gamma_{10} C_1 [N_{10}(w_1 - w_{20})] = \gamma_{20} C_2 [N_{20}(w_2 - w_{20})],$$

где C_1, C_2 означают, независимо одно от другого, sin, cos, sh, ch. В общем случае $|\gamma_{10}| \neq |\gamma_{20}|$. Если же $\gamma_{20} = \pm i\gamma_{20}$, то C_1 и C_2 означают одновременно sh или отлично sh. Если $\gamma_{10} = \pm\gamma_{20}$, то одно и только одно из C_1, C_2 означает sh. При невыполнении этих условий получим зависимости второго жанра.

Поступило
23 IX 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. А. Вильнер, ДАН, 53, № 3 (1946). [2] J. Tannery et Molk, Eléments des fonctions elliptiques. [3] И. А. Вильнер, Прикладн. математ. и мех., 4, в. 2 (1940).