Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVI, № 2

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Я. А. МИНДЛИН

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В СЛУЧАЕ КРУГА И СФЕРЫ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 10 XI 1946)

В наших работах ([1]), посвященных решению внешней задачи Коши — Дирихле для волнового уравнения в случае круга и сферы, развит метод, который в настоящей работе применяется для решения внутренних задач для круга и сферы.

Рассмотрим сначала двумерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{1}$$

Мы ставим себе задачей найти интеграл уравнения (1) во внутренности круга радиуса 1, если

$$\left.\begin{aligned} u\Big|_{t=0} &= u_0(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)}(r)\cos n\theta+b_n^{(1)}(r)\sin n\theta,\\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} &= u_0^{(1)}(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)}(r)\cos n\theta+b_n^{(2)}(r)\sin n\theta,\end{aligned}\right\} r\leqslant 1 \tag{2}$$

$$u\Big|_{r=1}=\varphi(\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty} p_n(t)\cos n\theta+q_n(t)\sin n\theta. \tag{3}$$

Для решения задачи воспользуемся данным нами ([2]) представлением решения уравнения (1) интегралом, аналогичным интегралу Даламбера и представляющим собой обобщение интеграла уравнения (1) в случае радиальных колебаний, данного Лэмбом ([2]) и Леви-Чивита ([3]). Имеем:

$$\begin{aligned} u=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty}\{ &[A_n^{(1)}(at-r\cosh\xi)+A_n^{(2)}(at+r\cosh\xi)]\cos n\theta+\\ &+[B_n^{(1)}(at-r\cosh\xi)+B_n^{(2)}(at+r\cosh\xi)]\sin n\theta\}\cosh n\xi\, d\xi. \end{aligned} \tag{4}$$

Удовлетворяя начальным условиям (2), мы должны иметь

$$\begin{aligned} a_n^{(1)}(r) &= \int_0^{\infty}[A_n^{(1)}(-r\cosh\xi)+A_n^{(2)}(r\cosh\xi)]\cosh n\xi\, d\xi,\\ \frac{1}{a}\, a_n^{(2)}(r) &= \int_0^{\infty}[A_n^{(1)\prime}(-r\cosh\xi)+A_n^{(2)\prime}(r\cosh\xi)]\cosh n\xi\, d\xi. \end{aligned} \tag{5}$$

Аналогичные интегральные уравнения получаем и для искомых функций $B_n^{(i)}$ $(i = 1, 2)$. Интегральные уравнения (5), представляющие собой обобщенные интегральные уравнения Шлемильха, решение которых было нами приведено в ([1]), позволяют найти искомые функции при изменении аргумента в интервале (0, 1).

Имеем

$$A_n^{(1)}(-r) + A_n^{(2)}(r) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty [na_n^{(1)}(r\cos h\xi) + $$
$$+ r\cos h\xi\, a_n^{(1)\prime}(r\cos h\xi)]\, T_{n-1}(\sec h\xi)\, d\xi,$$
$$A_n^{(1)\prime}(-r) + A_n^{(2)\prime}(r) = -\frac{2}{\pi a}\int_0^\infty [na_n^{(2)}(r\cos h\xi) + \tag{6}$$
$$+ r\cos h\xi\, a_n^{(2)\prime}(r\cos h\xi)]\, T_{n-1}(\sec h\xi)\, d\xi.$$

Функция $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ есть полином Чебышева.

Для $n = 0$ полагаем $T_{-1}(\mu) = T_1(\mu)$, причем предполагается, что функции $a_n^i(r)$ обращаются в нуль при $r > 1$.

Равенства (6) определяют искомые функции $A_n^{(1)}(-r)$ и $A_n^{(2)}(r)$ для r, изменяющегося в интервале (0, 1). Определение $A_n^{(1)}$ для положительного значения аргумента дано:

$$A_n^{(1)}(at) + A_n^{(2)}(at) = 0, \tag{7}$$

что представляет собой условие „непрерывности“ в начале координат ([4]). Аналогично определяются функции $B_n^{(i)}$.

С целью определения $A_n^{(i)}$ и $B_n^{(i)}$ для других значений аргумента будем удовлетворять граничным условиям; при этом должны иметь:

$$p_n(t) = \int_{-\infty}^{at-1} \frac{A_n^{(1)}(z)\, T_n(at-z)\, dz}{\sqrt{(at-z)^2-1}} + \int_{at+1}^{\infty} \frac{A_n^{(2)}(z)\, T_n(z-at)\, dz}{\sqrt{(z-at)^2-1}} \tag{8}$$

и аналогичное соотношение для $B_n^{(i)}$. Пусть переменная t изменяется в интервале $0 \leqslant t \leqslant 2/a$. Разобьем первое слагаемое в уравнении (8) на два следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{at-1} \frac{A_n^{(1)}(z)\, T_n(at-z)\, dz}{\sqrt{(at-z)^2-1}} = \int_{-\infty}^{-1} \frac{A_n^{(1)}(z)\, T_n(at-z)\, dz}{\sqrt{(at-z)^2-1}} + $$
$$+ \int_{-1}^{at-1} \frac{A_n^{(1)}(z)\, T_n(at-z)\, dz}{\sqrt{(at-z)^2-1}}. \tag{9}$$

Первое слагаемое правой части равенства (9) мы можем считать равным нулю, второе же слагаемое, которое мы обозначим через $h_n^{(1)}(t)$, представляет собой известную функцию, когда t изменяется в указанном промежутке. Полагая $at + 1 = x$, имеем, что, при принятых нами обозначениях, интегральное уравнение (8) примет вид

$$p_n\left(\frac{x-1}{a}\right) - h_n^{(1)}\left(\frac{x-1}{a}\right) = \int_x^3 \frac{A_n^{(2)}(y)\, T_n(y-x+1)\, dy}{\sqrt{(y-x+1)^2-1}} \quad (1 \leqslant x \leqslant 3), \tag{10}$$

причем левая часть равенства (10) при $x=3$ обращается в нуль в силу непротиворечивости граничных и начальных условий. Из общей теории интегральных уравнений первого рода типа Вольтерра [5] следует, что уравнение (10) при $1 \leqslant x \leqslant y \leqslant 3$ имеет единственное решение. Обычными методами мы находим решение уравнения (10), которое имеет вид

$$A_n^{(2)}(y) = \int_y^3 H_n(z-y) \frac{d}{dz} \left[p_n\left(\frac{z-1}{a}\right) - h_n^{(1)}\left(\frac{z-1}{a}\right) \right] dz. \tag{11}$$

Резольвента $H_n(z)$ определяется выражением вида:

$$H_n(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} e^{sz} \frac{e^{-s}}{s\, K_n(s)}\, ds, \tag{12}$$

где $K_n(s)$ — известная из теории бесселевых функций функция Macdonald'а, а δ — достаточно большое положительное число. Окончательно мы нашли искомую функцию $A_n^{(2)}(\mu)$ в интервале (1, 3). По формуле (7) мы находим $A_n^{(1)}(\mu)$ в том же интервале.

Для дальнейшего определения искомой функции $A_n^{(2)}(\mu)$ нужно точно так же, как мы только что это делали, обратиться опять к интегральному уравнению (8). Пусть $(2k+1) \leqslant \mu \leqslant (2k+3)$, где k — целое положительное число или нуль. Этот промежуток соответствует изменению t в промежутке $\frac{2k}{a} \leqslant t \leqslant \frac{2k+2}{a}$. Для этого только нужно в интегральном уравнении (8) первое слагаемое, представляющее известную функцию, перенести в левую часть. Полученное при этом интегральное уравнение даст возможность определить искомую функцию $A_n^{(2)}(\mu)$ в промежутке $(2k+1) \leqslant \mu \leqslant (2k+3)$, если для значений μ, лежащих в промежутке $(2k-1) \leqslant \mu \leqslant (2k+1)$, мы ранее ее определили. По формуле (7) мы найдем $A_n^{(1)}(\mu)$ в том же промежутке. Указанным процессом мы находим функции $A_n^{(2)}(\mu)$, $B_n^{(2)}(\mu)$ для значений аргумента, соответствующих какому угодно конечному моменту времени. Если воспользоваться оценками акад. Соболева, приведенными в книге акад. Смирнова [6], позволяющими оценить среднюю квадратичную ошибку в решении по средней квадратичной ошибке в начальных и предельных данных, то сразу приходим к выводу, что полученное нами решение вида (4) в среднем сколь угодно мало отличается от истинного.

Для случая трехмерного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{13}$$

общее представление решения, данное нами, аналогичное (4), имеет вид:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \int_0^{\infty} \Big\{ [A_{n,m}^{(1)}(at - r\cosh\xi) + A_{n,m}^{(2)}(at + r\cosh\xi)] \cos m\varphi + \\ + [B_{n,m}^{(1)}(at - r\cosh\xi) + B_{n,m}^{(2)}(at + \\ + r\cosh\xi)] \sin m\varphi \Big\} P_n(\cosh\xi) \sinh\xi\, d\xi\, P_n^m(\cos\theta). \tag{14}$$

Рассмотрим смешанную задачу для волнового уравнения (13) в случае сферы:

$$u\Big|_{t=0} = u_0(r, \theta, \varphi); \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = u_0^{(1)}(r, \theta, \varphi); \quad u\Big|_{r=1} = F(\theta, \varphi, t). \tag{15}$$

Заданные начальные и граничные условия разлагаем в ряд по сферическим функциям. Тогда, аналогично предыдущему, искомые функции определяются следующими формулами:

$$A^{(1)}_{n,m}(-r)+A^{(2)}_{n,m}(r)=-(n+1)\,a^{(1)}_{n,m}(r)-r\,a^{(1)\prime}_{n,m}(r)+$$

$$+\int\limits_0^\infty [(n+1)\operatorname{tg}h\xi\, a^{(1)}_{n,m}(r\cos h\xi)+r\sin h\xi\, a^{(1)\prime}_{n,m}(r\cos h\xi)]\,P'_{n-1}(\sec h\xi)\,d\xi,$$

$$A^{(1)\prime}_{n,m}(-r)+A^{(2)\prime}_{n,m}(r)=-\frac{1}{a}\,[(n+1)\,a^{(2)}_{n,m}(r)+r\;a^{(2)\prime}_{n,m}(r)]+ \qquad (16)$$

$$+\frac{1}{a}\int\limits_0^\infty [(n+1)\operatorname{tg}h\xi\, a^{(2)}_{n,m}(r\cos h\xi)+r\sin h\xi\, a^{(2)\prime}_{n,m}(r\cos h\xi)]\,P'_{n-1}(\sec h\xi)\,d\xi,$$

причем предполагается, что функции $a^{(i)}_{n,m}(r)$, являющиеся коэффициентами разложения в ряд по сферическим функциям функций, определяющих начальный режим, обращаются в нуль при $r>1$.

Для $n=0$ полагаем $P'_{-1}(\mu)=0$. Аналогично (7) имеем

$$A^{(1)}_{n,m}(at)+A^{(2)}_{n,m}(at)=0. \qquad (17)$$

Из граничного условия получаем:

$$p_{n,m}(t)=\int\limits_{-\infty}^{at-1} A^{(1)}_{n,m}(z)\,P_n(at-z)\,dz+\int\limits_{at+1}^{\infty} A^{(2)}_{n,m}(z)\,P(z-at)\,dz. \qquad (18)$$

Подобно предыдущему имеем

$$p_{n,m}\left(\frac{x-1}{a}\right)-h^{(1)}_{n,m}\left(\frac{x-1}{a}\right)=\int\limits_x^3 A^{(2)}_{n,m}(y)\,P_n(y-x+1)\,dy. \qquad (19)$$

Решение уравнения (19) имеет вид

$$A^{(2)}_{n,m}(x)=-\frac{1}{a}\left[p'_{n,m}\left(\frac{x-1}{a}\right)-h'_{n,m}\left(\frac{x-1}{a}\right)\right]+ \qquad (20)$$

$$+\frac{1}{a}\int\limits_x^3 H^{(m)}_n(x-z)\left[p_{n,m}\left(\frac{z-1}{a}\right)-h^{(1)}_{n,m}\left(\frac{z-1}{a}\right)\right]dz.$$

Резольвента $H^{(m)}_n(\nu)$ равна сумме вычетов функции

$$\Phi_n(s)=\frac{s^n e^{s\nu}}{s^n-P'_n(1)\,s^{n-1}+P''_n(1)\,s^{n-2}+\ldots+(-1)^n P^{(n)}_n(1)} \qquad (21)$$

по отношению к нулям знаменателя. Найденную таким образом функцию $A^{(2)}_{n,m}(\mu)$ в интервале $(1, 3)$ мы, аналогично тому как в плоском случае, находим для значений аргумента, соответствующих какому угодно конечному моменту времени.

Рассмотренные задачи были нами ранее решены (7) при определенным образом заданных начальных и граничных условиях (нулевой начальный режим и граничное условие выражалось конечной суммой), пользуясь интегралом волнового уравнения, данного Whittaker'ом (8).

Институт механики Академии Наук СССР

Поступило 10 XI 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Я. Миндлин, ДАН, 25, № 4 (1939); 26, № 6 (1940). [2] H. Lamb, Proc. Lond. Mathem. Soc. (1) 35, 141 (1902). [3] T. Levi-Civita, Nuovo Citnento, 14 (1897). [4] J. W. Strutt, baron Rayleigh, Theory of Sound, Loudon, 1937. [5] V. Volterra, Leçons sur les l'equations intégrales, Paris, 1913. [6] В. Смирнов, Курс высшей математики, 4, гл. 3, § 3, 1941. [7] Я. Миндлин, Прикладная математ. и мех., Новая сер., 1, вып. 4 (1938); Изв. НИММ при Томск. гос. ун-те, 2, в. 2 (1938). [8] E. Whittaker, Mathemat. Ann. (1903).