Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVI, № 2

МЕХАНИКА

А. Г. ИШКОВА

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКИ, ЛЕЖАЩЕЙ НА УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ, ПОД ДЕЙСТВИЕМ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКИ

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 9 XI 1946)

Обозначим: w — прогиб плиты, v — осадку грунта, p — реакцию основания, q — интенсивность нагрузки, $\rho = \bar{\rho}/r$ — безразмерный радиус. p и w должны удовлетворять дифференциальному уравнению изгиба Софи-Жермен:

$$\nabla^2\nabla^2 w = \frac{r^4}{D}\,[q - p(\rho)]\,, \tag{1}$$

и уравнению Буссинеска, преобразованному Шлейхером для круга:

$$v = \frac{4(1-\mu_0^2)}{\pi E_0}\left\{\frac{1}{\rho}\int\limits_0^\rho\left[p(\rho')\rho'\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^2\sin^2 x}}\right]d\rho' + \right.$$
$$\left. + \int\limits_\rho^1\left[p(\rho')\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^2\sin^2 x}}\right]d\rho'.\right. \tag{2}$$

При свободно лежащей пластинке

$$\underset{\text{при } \rho=1}{M_r} = 0. \tag{3}$$

Основная трудность решения задачи при заданной нагрузке q состоит в определении p из уравнений (1) и (2), которым эта функция совместно с w удовлетворяет. Для нахождения p исключим w, выразив w через p из уравнения (1), и приравняем v по (2). Таким образом, для нахождения p имеем

$$w \equiv v. \tag{4}$$

Будем искать функцию p в виде

$$p = \frac{A}{\sqrt{1-\rho^2}} + \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n}\rho^{2n}\,, \tag{5}$$

где $1/\sqrt{1-\rho^2}$ есть предполагаемая особенность этой функции. Подставив (5) в (1) и (2) и выразив w и v также в виде бесконечных рядов по степеням ρ и удовлетворив (3), приравнивая в (4) коэффициенты при одинаковых степенях ρ в левой и правой частях, можем заменить уравнение (4) для отыскания p бесконечной системой уравнений с бесконечным числом неизвестных коэффициентов A и b_{2n}. Эта бесконечная система имеет вид:

$$q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{2n}}{n+1} + 2A,$$

$$-\frac{q(3m_p+1)}{8(m_p+1)K} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4K} \frac{2nm_p + 3m_p + 1}{(n+2)(n+1)^2(m_p+1)} \right) (b_{2n} + A\gamma_{2n}),$$

$$\frac{q}{9K} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{2n}}{2n-3} + \frac{1}{9K}(b_0 + A\gamma_0),$$

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{2n}}{2n-5} + \frac{4}{225K}(b_2 + A\gamma_2),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (\mathrm{I})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{2n}}{2n-2m-1} + \frac{(2m-2)!!}{(2m+1)!!} \frac{1}{K} (b_{2m-2} + A\gamma_{2m-2}),$$

где $K = \frac{2(1-\mu_0^2)D}{E_0 r^3}$, m_p — коэффициент Пуассона для плиты, $\gamma_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$.

В уравнения этой системы входит параметр K. Для $K = \infty$ и $K = 0$ точное решение аналогичной системы дал Боровика. Поставим задачу найти точное решение системы (I) для общего случая $K \neq 0$ и $K \neq \infty$.

Будем искать ее решение в виде бесконечных рядов по степеням $1/K$, т. е.

$$A = \sum_{\mu=0}^{\infty} A_\mu \frac{1}{K^\mu}; \quad b_{2n} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \alpha_{\mu n} \frac{1}{K^\mu}. \qquad (6)$$

Подставим эти ряды в уравнения системы (I) и будем приравнивать в каждом уравнении члены с одинаковыми степенями $1/K$. Тогда каждое уравнение этой системы распадется на бесконечную систему уравнений относительно новых неизвестных A_μ и $\alpha_{\mu n}$. Получится некоторая совокупность бесконечных систем. Оказывается, что уравнения этой совокупности можно перегруппировать таким образом, что получится новая совокупность такая, что каждое уравнение одной системы будет отличаться от соответствующего ему уравнения любой другой системы только правой частью, а коэффициенты при неизвестных в левых частях будут одинаковы. Если правые части обозначить через $\beta_{\mu m}$ и принять во внимание, что все α_{0n} равны нулю, то после перегруппировки получится совокупность:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_{1n}}{n+1} + 2A_1 = 0; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_{1n}}{2n-2m-1} = \beta_{1m}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_{2n}}{n+1} + 2A_2 = 0; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_{2n}}{2n-2m-1} = \beta_{2m}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (\mathrm{I}')$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_{\mu n}}{n+1} + 2A_\mu = 0; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_{\mu n}}{2n-2m-1} = \beta_{\mu m}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

. . . .

где

$$\beta_{\mu 0} = A_{\mu-1}\,\theta + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{2nm_p + 3m_p + 1}{(n+2)(n+1)^2(m_p+1)}\right]\alpha_{\mu-1\,n},$$

$$\beta_{\mu m} = -\frac{(2m-2)!!^2}{(2m+1)!!^2}\left(\alpha_{\mu-1\,m-1} + \gamma_{2m-2}A_{\mu-1}\right). \tag{7}$$

Начальные значения при $\mu = 1$:

$$\beta_{10} = l + A_0\theta, \qquad \beta_{11} = \frac{q}{18}\ ; \quad \beta_{1m} = -\frac{(2m-2)!!^2}{(2m+1)!!^2}\left(\alpha_{0\,m-1} + \gamma_{2m-2}A_0\right), \tag{8}$$

где

$$A_0 = \frac{q}{2}, \quad l = -\frac{q\,(3m_p+1)}{8\,(m_p+1)},$$

$$\theta = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\frac{(2nm_p + 3m_p + 1)}{(n+2)(n+1)^2(m_p+1)}\right]. \tag{9}$$

Совокупность (I'') может быть записана в общем виде:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_{\mu n}}{n+1} + 2A_\mu = 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_{\mu n}}{2n-2m-1} = \beta_{\mu m}, \quad \begin{matrix} m = 0, 1, 2, \ldots, \\ \mu = 0, 1, 2, \ldots \end{matrix} \tag{II}$$

Поэтому в дальнейшем будем рассматривать только одну какую-нибудь систему из этой совокупности для произвольного значения μ.

В начале поставлена задача найти точное решение бесконечной системы (I). Теперь она свелась к нахождению точного решения системы (II). Нами найдено точное решение системы (II) в виде:

$$\alpha_{\mu n} = \frac{2\,(2n-1)!!}{\pi\,(2n)!!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(2s+1)!!}{(2s)!!\,(2n-2s-1)}\,\beta_{\mu s}\ ; \quad A_\mu = \frac{2}{\pi}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(2s+1)!!}{(2s)!!\,(2s+3)}\,\beta_{\mu s}. \tag{10}$$

Здесь величины $\beta_{\mu s}$ зависят от $\alpha_{\mu-1s}$ и $A_{\mu-1}$, что видно из формул (8). Можно установить рекурентную зависимость непосредственно между $\beta_{\mu s}$ и $\beta_{\mu-1\,s}$, минуя $\alpha_{\mu-1\,s}$ и $A_{\mu-1}$. Оказывается, кроме того, что удобнее ввести величины $\delta_{\mu s}$.

$$\delta_{\mu s} = \frac{(2s+1)!!}{(2s)!!}\,\beta_{\mu s}. \tag{11}$$

Рекурентные соотношения между этими величинами имеют вид:

$$\delta_{\mu 0} = -\frac{2}{\pi}\sum_{s=0}^{\infty}\left[\frac{2\,(m_p-1)}{3\,(m_p+1)(2s+3)(2s+5)} + \frac{1}{(2s+3)^2}\right]\delta_{\mu-1\,s}, \quad \mu = 2, 3, \ldots \tag{12}$$

$$\delta_{\mu m} = -\frac{2}{\pi}\,\frac{1}{(2m-1)(2m+1)}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\delta_{\mu-1\,s}}{(2m-2s-3)(2s+3)}, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

причем

$$\delta_{10} = l + A_0\theta, \quad \delta_{11} = \frac{q}{12}, \quad \delta_{1m} = -\frac{q}{4m\,(4m^2-1)}. \tag{13}$$

Через величины $\delta_{\mu s}$ решение системы (II) выражается в виде:

$$\alpha_{\mu n}=\frac{2\,(2n-1)!!}{\pi\,(2n)!!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\delta_{\mu s}}{2n-2s-1}\,;\qquad A_{\mu}=\frac{2}{\pi}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\delta_{\mu s}}{2s+3}\,. \tag{14}$$

Точное решение системы (I) имеет вид:

$$\begin{gathered}
A=\frac{2}{\pi}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{1}{K^{\mu}}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\delta_{\mu s}}{2s+3}\,,\\
b_{2n}=\frac{2}{\pi}\,\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{1}{K^{\mu}}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\delta_{\mu s}}{2n-2s-1}\,.
\end{gathered} \tag{15}$$

Для доказательства сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_{2n}\rho^{2n}$ мы доказали сходимость всех рядов, входящих в решение, и получили следующие оценки сходимости:

$$\begin{gathered}
|\delta_{\mu 0}|<\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\mu-1}\cdot 0{,}438\cdot 1{,}159\,(0{,}23)^{\mu}q,\\
|\delta_{\mu m}|<\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\mu-1}\frac{1}{4m^2-1}\,1{,}159\,(0{,}23)^{\mu}q.
\end{gathered} \tag{16}$$

Пользуясь (16) и (14), получим:

$$|\alpha_{\mu n}|<4q\left(\frac{0{,}46}{\pi}\right)^{\mu}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\,n}\,. \tag{17}$$

Пользуясь (17) и (6), получим:

$$|b_{2n}|<4q\,\frac{(2n-1)!!}{2n!!\,n}\,\frac{1}{\left(1-\dfrac{0{,}46}{\pi K}\right)}\,, \tag{18}$$

и найдем интервал изменений параметра K:

$$0{,}146<K<\infty, \tag{19}$$

для которого решение системы (I) можно искать в виде (6). Пользуясь (18), мы доказали, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_{2n}\rho^{n}$ сходится внутри единичного круга и на окружности, так как

$$\sum_{n=0}^{\infty}|b_{2n}|\,\rho^{2n}<\frac{4q}{\left(1-\dfrac{0{,}46}{\pi K}\right)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\,n}\rho^{2n}\,;$$

мажорантный ряд в правой части сходится при $0\leqslant\rho\leqslant 1$, так как его общий член при $0\leqslant\rho\leqslant 1$ не больше $\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!\,n}$, а ряд с таким общим членом сходится.

Этим самым строго доказывается, что предположение об особенности функции p вида $1/\sqrt{1-\rho^2}$ было правильным. Нами даны в явном виде выражения для коэффициентов A и b_{2n} (15), являющихся точным решением системы (I) и дающих выражение p по формуле (5), т. е. дано точное решение поставленной задачи.

Поступило
9 XI 1946