Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVI, № 2

МАТЕМАТИКА

И. С. СОМИНСКИЙ

О ГРАНИЦАХ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ ГРУППЫ АВТОМОРФИЗМОВ ТРОЙНИЧНОЙ КВАДРАТИЧНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОЙ ФОРМЫ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 6 XI 1946)

Пусть $f(x, y, z)$ — тройничная квадратичная неопределенная форма с целыми коэффициентами, положительного дискриминанта D, не представляющая нуля; $\mathfrak{G}$ — группа целочисленных автоморфизмов, т. е. подстановок, преобразующих f в себя; Ω — фундаментальная область группы $\mathfrak{G}$, построенная по способу Эрмита — Зеллинга (1); $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ — границы Ω, по которым Ω примыкает к соседним фундаментальным областям $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k$; $S_1, S_2, \ldots, S_k$ — автоморфизмы f, при помощи которых Ω преобразуется в $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k$.

Известно (1), что γ_i, вообще, криволинейная коническая поверхность. В этой заметке мы ставим своей целью показать, что Ω может быть преобразована в другую фундаментальную область $\overline{\Omega}$, границы которой $\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2, \ldots, \overline{\gamma}_m$ — плоские.

При преобразовании Ω в Ω_1 возможны три случая: a) γ_1 остается неподвижной, b) γ_1 преобразуется в себя, не оставаясь неподвижной, c) γ_1 преобразуется в другую границу Ω_1.

В первом случае γ_1 лежит в одной плоскости, так как иначе существовали бы три некомпланарных вектора, остающихся неподвижными при преобразовании S_1. В этом случае S_1 — автоморфизм второго порядка, сохраняющий неподвижной гиперболическую плоскость (т. е. плоскость, пересекающую двухполостный гиперболоид $f(x,y,z) = D$).

Во втором случае γ_1 состоит из двух эквивалентных частей, симметричных относительно прямой OM, неподвижной при преобразовании S_1. В этом случае γ_1, вообще, не лежит в одной плоскости.

Удвоенная фундаментальная область $\Omega + \Omega_1$ каждой плоскостью, проходящей через OM, делится на две части, преобразующиеся друг в друга подстановкой S_1; следовательно, каждая из этих частей есть фундаментальная область. Плоскость, проходящая через OM и ребра границы γ_1, отделяет от $\Omega + \Omega_1$ фундаментальную область $\overline{\Omega}$, все границы которой, кроме γ_1, совпадают с границами Ω, а граница γ_1 заменена плоской границей $\overline{\gamma}_1$. В этом случае S_1 — автоморфизм второго порядка, преобразующий в себя эллиптическую плоскость (т. е. плоскость, пересекающую однополостный гиперболоид $f(x,y,z) = -D$ по эллипсу).

В третьем случае в фундаментальной области Ω_1 имеется граница $\widetilde{\gamma}_1$, эквивалентная γ_1. Тогда и в каждой другой фундаментальной области имеются две границы, эквивалентные γ_1. Пусть γ_i — граница Ω, эквивалентная γ_1; α_1, β_1 и α_i, β_i — ребра, по которым γ_1 и γ_i пересекаются с другими границами Ω.

Коническое тело K_1, ограниченное γ_1 и плоскостью P_1, проходящей через α_1 и β_1, некоторым автоморфизмом T преобразуется в тело K_i, ограниченное γ_i и плоскостью P_i, проходящей через α_i и β_i. Допустим, что K_i не пересекается другими границами Ω, кроме γ_1, тогда либо K_1, либо K_i полностью принадлежит Ω. Если имеет место первый из этих случаев, исключим из Ω K_1 и вместо него присоединим K_i. Этим фундаментальная область Ω преобразована в другую фундаментальную область $\overline{\Omega}$, все границы которой, кроме γ_1 и γ_i, совпадают с границами Ω, а границы γ_1 и γ_i заменены границами $\overline{\gamma}_1$ и $\overline{\gamma}_i$, полностью лежащими в плоскостях P_1 и P_i, соответственно. Аналогично поступаем в случае, когда Ω содержит K_i.

Мыслимо, что тело K_1 может, кроме γ_1, пересекаться и другими границами Ω. В этом случае прямыми $\alpha_1, OM', \ldots, OM^{(s-1)}, \beta_1$ разобьем границу γ_1 на конечное число частей $\gamma_1', \gamma_1'', \ldots, \gamma_1^{(s)}$ так, чтобы они вместе с плоскостями $P_1', P_1'', \ldots, P_1^{(s)}$, проходящими через α_1 и OM', OM' и $OM'', \ldots, OM^{(s-1)}$ и β_1, ограничили конические тела $K_1', K_1'', \ldots, K_1^{(s)}$, не пересекающие других, кроме γ_1, границ Ω.

С каждым из тел $K_1^{(i)}$ поступаем так же, как поступили с телом K_1. Таким способом, не нарушая других границ Ω, преобразуем ее в другую фундаментальную область, у которой вместо криволинейных границ γ_1 и γ_i будут границы $\overline{\gamma}_1', \overline{\gamma}_1'', \ldots, \overline{\gamma}_1^{(s)}$ и $\overline{\gamma}_i', \overline{\gamma}_i'', \ldots, \overline{\gamma}_i^{(s)}$, лежащие в плоскостях $P_1', P_1'', \ldots, P_1^{(s)}$ и $P_i', P_i'', \ldots, P_i^{(s)}$.

Я очень признателен профессорам Д. Фаддееву и В. Тартаковскому, проявившим внимание и интерес к моей работе.

Ленинградский государственный
педагогический институт им.
А. И. Герцена

Поступило
6 XI 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. С. Соминский. Уч. зап. Ленинградск. ун-та, № 55, 148 (1940).