Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVI, № 2

МАТЕМАТИКА

Л. Н. СЛОБОДЕЦКИЙ

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕГУЛЯРНЫХ ФУНКЦИЙ РЯДАМИ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 8 XI 1946)

Рассматривается вопрос о представлении регулярных функций рядами типа

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Pi_n(z), \tag{1}$$

где

$$\Pi_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z - a_k}{1 - z\bar{a}_k} \quad (n \geqslant 1); \qquad |a_k| < 1; \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (1 - |a_k|) = +\infty$$

в предположении, что множество $\{a_k\}$ имеет только конечное число точек сгущения: $e^{i\alpha_1}, e^{i\alpha_2}, \ldots, e^{i\alpha_p}$.

Пусть $\{a_k\}^{(l)}$ — множество, состоящее из элементов $\{a_k\}$, для которых $e^{i\alpha_l}$ есть ближайшая из точек сгущения $\{a_k\}$, A_n — множество, состоящее из первых n элементов $\{a_k\}$, и $A_{(n)}^{(l)}$ — общая часть A_n и $\{a_k\}^{(l)}$.

Положим $b_k = 1 - a_k e^{-i\alpha_l}$, если $a_k \in \{a_k\}^{(l)}$, и определим $2p$ чисел:

$$\overline{\underline{k}}_l = \overline{\underline{\lim}}_{n \to \infty} \frac{\sum\limits_{a_k \in A_n^{(l)}} \mathrm{Re}\,(b_k)}{\sum\limits_{k=1}^{n} |b_k|} \quad (l = 1, 2, \ldots, p, \ \mathrm{Re} \text{ — символ вещественной части}). \tag{2}$$

Построим функции $\underline{u}\,(z)$ и $\overline{u}\,(z)$:

$$\overline{u}(e^{i\alpha_l}) = \underline{u}(e^{i\alpha_l}) = 0 \quad (l = 1, 2, \ldots, p) \tag{3}$$

и, при $z \neq e^{i\alpha_l}$ $(l = 1, 2, \ldots, p)$,

$$\left.\begin{aligned} \overline{u}(z) &= \sum_{l=1}^{p} \overline{k}_l \mathrm{Re}\left(\frac{1 + ze^{-i\alpha_l}}{1 - ze^{-i\alpha_l}}\right), && (4) \\ \overline{u}(z) &= \sum_{l=1}^{p} \underline{k}_l \mathrm{Re}\left(\frac{1 + ze^{-i\alpha_l}}{1 - ze^{-i\alpha_l}}\right), && (5) \end{aligned}\right\} \ |z| \leqslant 1$$

$$\left.\begin{aligned} \overline{u}(z) &= \sum_{l=1}^{p} \underline{k}_l \mathrm{Re}\left(\frac{1 + ze^{-i\alpha_l}}{1 - ze^{-i\alpha_l}}\right), && (6) \\ \underline{u}(z) &= \sum_{l=1}^{p} k_l \mathrm{Re}\left(\frac{1 + ze^{-i\alpha_l}}{1 - ze^{-i\alpha_l}}\right). && (7) \end{aligned}\right\} \ |z| \geqslant 1$$

Теорема 1. *Пусть ряд (1) абсолютно сходится (сходится) в* $z_0 \neq a_k$ *и* $\frac{1}{\bar{a}_k}$. *Тогда ряд (1) абсолютно сходится (сходится) всюду в области (В):* $\underline{u}(z) > \bar{u}(z_0)$, *исключая точки* $z = \frac{1}{\bar{a}_k}$. *Сходимость ряда из абсолютных значений членов ряда (1) равномерна (просто равномерна) во всякой замкнутой и ограниченной части (В), не содержащей точек* $z = e^{i\alpha_l}$ *и* $\frac{1}{\bar{a}_k}$.

Из теоремы 1 вытекает существование u_a (u_c) — константы абсолютной сходимости (сходимости) ряда (1) и v_a (v_c) — константы абсолютной расходимости (расходимости) ряда (1), определяемых следующим образом:

а) если ряд (1) везде абсолютно сходится (сходится), исключая точки $z = \frac{1}{\bar{a}_k}$, то $u_a = v_a = -\infty$ $(u_c = v_c = -\infty)$;

б) если ряд (1) нигде не сходится абсолютно (не сходится), исключая точки $z = a_k$, то $u_a = v_a = +\infty$ $(u_c = v_c = +\infty)$;

в) в остальных случаях u_a (u_c) равно числу, обладающему свойством, что в области $\underline{u}(z) > u_a$ $(\underline{u}(z) > u_c)$ ряд (1) везде абсолютно сходится (сходится), исключая точки $z = \frac{1}{\bar{a}_k}$, и что в области $u(z) > u_a - \varepsilon$ $(\underline{u}(z) > u_c - \varepsilon)$ ряд (1) не сходится абсолютно (не сходится) хотя бы в одной точке, отличной от $z = \frac{1}{\bar{a}_k}$, при любом $\varepsilon > 0$.

v_a (v_c) равно числу, обладающему свойством, что в области $\bar{u}(z) < v_a$ $(\bar{u}(z) < v_c)$ ряд (1) нигде абсолютно не сходится (не сходится), исключая точки $z = a_k$, и что ряд (1) абсолютно сходится (сходится) хотя бы в одной точке области $\bar{u}(z) < v_a + \varepsilon$ $(\bar{u}(z) < v_c + \varepsilon)$, отличной от $z = a_k$ при любом $\varepsilon > 0$.

Теорема 2.

$$v_a \geqslant v_c \geqslant \varlimsup_{n \to \infty} \frac{\lg |c_n|}{\sum_{k=1}^{n} |b_k|} \geqslant u_a - \mu \geqslant u_c - \mu, \tag{8}$$

где

$$\mu = \min \left\{ \varlimsup_{n \to \infty} \frac{\lg \frac{1}{|b_n|}}{\sum_{k=1}^{n} |b_k|}, \ \varlimsup_{n \to \infty} \frac{\lg n}{\sum_{k=1}^{n} |b_k|} \right\} \tag{9}$$

Неравенство (8) *точное.*

Наложим на $\{a_k\}$ дополнительные условия:

1°. Для всех $k > N_0$ $|b_k| \geqslant |b_{k+1}|$.

2°. $\varlimsup_{k \leftarrow \infty} |\arg b_k| = \frac{\pi}{-} - \gamma < \frac{\pi}{2}$.

3°. $k_l > 0$ $(l = 1, 2, \ldots, p)$.

4°. $H(\tau) = o(N(\tau))$ при $\tau \to 0$, где $H(\tau)$ — количество b_k, по модулю равных τ, и $N(\tau)$ — количество b_k, по модулю бóльших τ.

Пусть

$$M_l(\tau) = \sum_{\substack{|b_k|>\tau \\ a_k \in \{a_k\}^{(l)}}} \cos(\arg b_k) \quad (l = 1, 2, \ldots, p); \tag{10}$$

$$\overline{\underline{d_l}} = \overline{\underline{\lim_{\tau \to 0}}} \frac{M_l(\tau)}{N(\tau)} \quad (l = 1, 2, \ldots, p); \tag{11}$$

$$Q(y) = y \int_{y/T_1}^{1} \frac{1+x^2}{x^2} N\left(\frac{y}{x}\right) dx, \tag{12}$$

где T_1 — любое фиксированное положительное число.

Теорема 3. *Пусть ряд* (1) *абсолютно сходится в* $z_0 \neq a_k$ ($|z_0| < 1$). *Тогда сумма ряда* (1) $f(z)$ *регулярна в* $\underline{u}(z) > \overline{u}(z_0)$ *и*

$$\overline{\lim_{\rho \to 0}} \frac{\lg |f(e^{i\alpha_l} - \rho e^{i(\alpha_l + \psi)})|}{\overline{u}(z_0)(1+\alpha)\frac{\overline{d_l}}{\underline{k_l}} Q\left(\sqrt{\frac{2\rho \underline{k_l} \cos\psi}{\overline{u}(z)(1+\alpha)}}\right)} \leqslant 1 \quad (l = 1, 2, \ldots, p) \tag{13}$$

равномерна для всех ψ ($|\psi| < \frac{\pi}{2} - \delta$) *при* $\delta > 0$ *и при любом* $\alpha > 0$.

Теорема 4. *Пусть* $\underline{d_l} = \overline{d_l} = d_l$ ($l = 1, 2, \ldots, p$). *При этом для всех* z $\underline{u}(z) = \overline{u}(z) = u(z)$. *Пусть, далее, существует предел*

$$\mu_1 = \lim_{\tau \to 0} \frac{\lg \frac{1}{\tau}}{\sum_{|b_k|>\tau} |b_k|} \tag{14}$$

и $f(z)$ *разлагается в ряд* (1), *сходящийся всюду в области* $u(z) > u_0 - \mu_1$, *исключая точки* $z = \frac{1}{\overline{a}_k}$. *Тогда*

$$\overline{\lim_{\rho \to 0}} \frac{\lg |f(e^{i\alpha_l} - \rho e^{i(\alpha_l + \psi)})|}{u_0 Q\left(\sqrt{\frac{2\rho d_l \cos\psi}{u_0(1+\alpha)}}\right)} \leqslant 1, \quad \mu_1 = 0, \tag{15}$$

$$\overline{\lim_{\rho \to 0}} \frac{\lg |f(e^{i\alpha_l} - \rho e^{i(\alpha_l + \psi)})|}{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{u_0}{\mu_1}\right) \lg \frac{1}{\rho}} \leqslant 1, \quad \mu_1 \neq 0 \tag{16}$$

равномерно для всех ψ ($|\psi| < \frac{\pi}{2} - \delta$) *при* $\delta > 0$ *и при любом* $\alpha > 0$.

Достаточные условия представления (1) устанавливаются при дополнительном условии:

5°.
$$\frac{1}{\sum_{|b_k|>\tau} |b_k|} = o\left(\frac{1}{\lg \lg \tau^{-1}}\right).$$

Теорема 5. *Пусть $f(z)$ регулярна в области* (B): $\overline{u}(z) > u_0 > 0$, $\{a_k\}$ *принадлежит* (B) *и*

$$\overline{\lim_{\eta_l \to 0}} \frac{\lg M(\eta_l)}{\frac{u_0}{\sin^2\gamma} \frac{d_l}{\overline{k}_l} Q\left(\sqrt{\frac{2\eta_l \overline{k}_l}{u_0}}\right)} < 1 \quad (l = 1, 2, \ldots, p), \tag{17}$$

где γ определяется из 2° и

$$M(\eta_l) = \max_{\operatorname{Re}(1 - ze^{i\alpha_l}) = \eta_l} |f(z)|. \tag{18}$$

Тогда $f(z)$ разлагается в ряд (1), *равномерно сходящийся в любой замкнутой части области* $\underline{u}(z) > \frac{u_0}{\sin^2\gamma}$.

Теорема 6. *Пусть $f(z)$ регулярна в* $|z| < 1$ *и*

$$\overline{\lim_{\eta_l \to 0}} \frac{\lg M(\eta_l)}{\frac{u_0}{\sin^2\gamma} \frac{d_l}{\overline{k}_l} Q\left(\sqrt{\frac{2\eta_l \overline{k}_l}{u_0}}\right)} < 1 \quad (l = 1, 2, \ldots, p), \tag{19}$$

где $u_0 > 0$. Тогда $f(z)$ разлагается в ряд (1), *равномерно сходящийся в любой замкнутой части области* $\underline{u}(z) > \frac{u_0}{\sin^2\gamma}$.

Мы приводим только основные результаты нашей работы. В частности, могут быть получены результаты Гончаровых (1), если полагать

$$N(t) \sim \frac{\omega}{t^s} \quad (s \geqslant 1, \omega > 0).$$

Поступило
8 XI 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1 В. Л. и М. К. Гончаровы, Уч. зап. МГУ, 5, в. 73 (1944).