Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVI, № 2

МАТЕМАТИКА

Дж. Х. КАРИМОВ

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 10 XI 1946)

Настоящая статья является развитием работы [1], в которой было рассмотрено уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[P(x)\frac{\partial Z}{\partial x}\right]-\frac{\partial Z}{\partial t}=\Phi(x,t)+\mu f(Z) \tag{1}$$

при условиях

$$Z(0,t)=Z(\pi,t)=0, \quad Z(x,t)=Z(x,t+1) \tag{2}$$

в области

$$\overline{D}=D\begin{pmatrix}0\leqslant x\leqslant\pi\\ 0\leqslant t\leqslant 1\end{pmatrix}$$

и доказана, при некоторых ограничениях, накладываемых на μ, Φ, P и f, теорема существования и единственности решения.

При доказательстве этой теоремы существенно было требование, чтобы параметр μ имел малые значения. В этой статье для указанной задачи доказывается теорема существования решения при больших конечных значениях параметра μ.

Результат, полученный в настоящей статье, тот же, что и в предыдущей, а доказательство отличное, освобожденное от вышеуказанного требования малости значения параметра μ; при этом используется теорема Арцелля.

Пусть $P(x)$ является функцией непрерывной вместе со своими производными P, P'' в области $\overline{D}$ и $P\geqslant k>0$. Функция $\Phi(x,t)$ будет непрерывной функцией в области $\overline{D}$ вместе со своей частной производной $\partial\Phi/\partial x=\Phi_1(x,t)$.

Кроме того, функция $\Phi(x,t)$ периодическая по t с периодом, равным единице, и разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по функциям ортогональной системы $\{\chi_n(x)\}$

$$\Phi(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_n(t)\chi_n(x),$$

где

$$\Phi_n(t)=\int_0^{\pi}\Phi(\eta,t)\chi_n(\eta)\,d\eta,$$

функции

$$\chi_1(x),\ \chi_2(x),\ \ldots,\ \chi_n(x),\ \ldots$$

являются характеристическими функциями уравнения Штурма-Лиувилля

$$\frac{d}{dx}\left[P(x)\frac{d\chi_n}{dx}\right]+\lambda_n\chi_n(x)=0 \tag{3}$$

с граничными условиями

$$\chi_n(\pi)=\chi_n(0)=0 \tag{4}$$

и λ_n — характеристические числа.

Тогда можно доказать следующую теорему:

Теорема. *Дифференциальное уравнение* (1) *допускает непрерывное решение вместе со своими частными производными до второго порядка в одласти* $\overline{D}$, *удовлетворяющее условиям* (2), *если*:

1) *функции* $\Phi(x,t)$ и $P(x)$ *удовлетворяют приведенным выше условиям*;

2) $|f'(Z_1)-f'(Z_2)|<M|Z_1-Z_2|,\quad f(0)=0,\quad f(Z)=f(-Z)$;

f *ограничена при конечном изменении* Z.

Докажем эту теорему методом последовательных приближений. За нулевое приближение $Z_0(x,t)$ возьмем решение уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[P(x)\frac{\partial Z_0}{\partial x}\right]-\frac{\partial Z_0}{\partial t}=\Phi(x,t). \tag{5}$$

Решение $Z_0(x,t)$ имеет вид

$$Z_0(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n^{(0)}(t)\chi_n(x),$$

где

$$T_n^{(0)}(t)=\int_0^1\frac{e^{\lambda_n(\xi-t)}}{1-e^{\lambda_n}}\int_0^{\pi}\Phi(\eta,\xi)\chi_n(\eta)\,d\eta-\int_0^t e^{\lambda_n(\xi-t)}d\xi\int_0^{\pi}\Phi(\eta,\xi)\chi_n(\eta)\,d\eta.$$

Зная нулевое приближение $Z_0(x,t)$, ищем первое приближение $Z_1(x,t)$ и так далее. Продолжая этот процесс далее, можно построить неограниченную последовательность приближений, причем, k-е приближение $Z_k(x,t)$ имеет вид

$$Z_k(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\chi_n(x)T_n^{(k)}(t), \tag{6}$$

где

$$T_n^{(k)}(t)=\int_0^1\frac{e^{\lambda_n(\xi-t)}}{1-e^{\lambda_n}}d\xi\int_0^{\pi}[\Phi(\eta,\xi)+\mu f(Z_{k-1})]\chi_n(\eta)\,d\eta-$$
$$-\int_0^t e^{\lambda_n(\xi-t)}d\xi\int_0^{\pi}[\Phi(\eta,\xi)+\mu f(Z_{k-1})]\chi_n(\eta)\,d\eta.$$

Итак, имеем последовательность функций

$$Z_1(x,t),\ Z_2(x,t),\dots,\ Z_k(x,t),\dots, \tag{7}$$

непрерывных со своими частными производными до второго порядка в области $\overline{D}$ и удовлетворяющих условиям (2).

Далее нетрудно убедиться, что функции последовательности (7) равномерно ограничены и равностепенно непрерывны в замкнутой области $\overline{D}$. Тогда, согласно теореме Арцелля, мы можем выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность из последовательности (7). Пусть выбранная последовательность будет:

$$Z_{m_1}(x, t),\ Z_{m_2}(x, t), \ldots,\ Z_{m_k}(x, t), \ldots \tag{8}$$

В силу теоремы Арцелля имеем

$$\lim_{k\to\infty} Z_{m_k}(x, t) = Z(x, t),$$

где $Z(x, t)$ — непрерывная функция в замкнутой области $\overline{D}$, которую можно написать в виде

$$Z(x, t) \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{e^{\lambda_n(\xi - t)} d\xi}{1 - e^{\lambda_n}} \int_0^{\pi} [\Phi(\eta, \xi) + \mu f(Z)]\, \chi_n(x)\, \chi_n(\eta)\, d\eta -$$
$$- \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t e^{\lambda_n(\xi - t)} d\xi \int_0^{\pi} [\Phi(\eta, \xi) + \mu f(Z)]\, \chi_n(x)\, \chi_n(\eta)\, d\eta.$$

Далее, легко доказать, что ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \frac{d\chi_n}{dx}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \frac{d^2\chi_n}{dx^2}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n(x) \frac{dT_n}{dt}$$

сходятся абсолютно и равномерно в области $\overline{D}$.

Тем самым теорема доказана.

Механико-математический
институт Академии Наук
УзССР

Поступило
10 XI 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Дж. Х. Каримов, ДАН, 28, № 5 (1940).