Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 1

АСТРОНОМИЯ

В. СОРОКИН

О ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ИЗОТЕРМИЧЕСКИХ ГАЗОВЫХ ШАРОВ

(Представлено академиком Л. Д. Ландау 29 IV 1947)

В последнее время при попытках построения теории красных гигантских звезд было замечено, что равновесные состояния изотермической массы идеального газа, находящегося в сферической оболочке, повидимому, не всегда устойчивы ([1]).

В свое время Джинс и недавно Северный ([2]) пытались исследовать устойчивость изотермических газовых шаров, но их работы кажутся нам несостоятельными. Здесь мы хотим исследовать, будет ли идеальный газ, находящийся в равновесии в сферической оболочке, температура которой постоянна, устойчивым с термодинамической точки зрения, т. е. будет ли его свободная энергия минимальна по отношению к любым возмущениям плотности, при которых температура остается неизменной.

Было бы интересно, конечно, рассмотреть случай любой степени вырождения газа, но тогда нельзя было бы избежать численного интегрирования уравнений, а нужные для этого таблицы автору сейчас недоступны. Мы ограничимся поэтому случаем невырожденного идеального газа. Для краткости выберем единицы длины и времени так, чтобы для гравитационной постоянной было выполнено соотношение $4\pi G=1$ и чтобы газовая постоянная на единицу массы B удовлетворяла условию $BT_0=1$ (T_0 — постоянная температура газа).

1. В равновесии химический потенциал должен быть одинаковым во всех частях системы

$$\mu_0+\varphi_0=\mathrm{const}, \tag{1}$$

где

$$\mu_0=\ln\rho_0, \tag{2}$$

ρ_0 — плотность газа, φ_0 — потенциал тяготения. С помощью уравнения Пуассона получаем отсюда

$$\nabla^2\mu_0=-e^{\mu_0}, \tag{3}$$

причем в центре шара μ_0 должно быть конечно, а градиент его μ_0' равен нулю (в равновесии все величины зависят только от радиуса). Если обозначить через $u(r)$ то решение уравнения (3), для которого $\mu_0(0)=0$, и положить

$$r\exp\frac{\mu_0(0)}{2}=x(r), \tag{4}$$

то все конечные в центре решения уравнения (3) даются формулой

$$\mu_0(r)=\mu_0(0)+u(x). \tag{5}$$

Для массы газа в шаре радиуса r получается уравнение

$$xu'(x) = -M(r)/4\pi r. \tag{6}$$

Для функции $u(r)$ Эмденом составлены таблицы ([3]). Если масса газа M и радиус оболочки R заданы, то по (6) находим $x_1 = x(R)$ и по (4) $\mu_0(0)$.

2. Так как рассматриваются только такие возмущения, при которых температура остается постоянной, то мы имеем дело со случаем, когда давление зависит только от плотности, и можно воспользоваться методом, предложенным Толманом и развитым Сорокиной в ее диссертации ([4]). В последней работе было показано, что возмущения плотности, не обладающие шаровой симметрией, не могут нарушить устойчивости. Поэтому мы будем дальше считать, что возмущения плотности и потенциала зависят только от радиуса. Свободная энергия в возмущенном состоянии будет

$$F = \int (\rho_0 + \rho) \ln (\rho_0 + \rho)\, dV + \frac{1}{2} \int (\rho_0 + \rho)(\varphi_0 + \varphi)\, dV,$$

где ρ и φ — возмущения плотности и потенциала, а ее изменение до членов второго порядка

$$\delta^2 F = \frac{1}{2} \int \left(\frac{\rho^2}{\rho_0} + \rho\varphi \right) dV. \tag{7}$$

Нормируя гравитационную часть так, чтобы было

$$\frac{1}{2} \int \rho\varphi\, dV = -1, \tag{8}$$

мы должны найти минимум выражения

$$\frac{1}{2} \int \frac{\rho^2}{\rho_0}\, dV \tag{9}$$

при условии, что масса газа не меняется

$$\int \rho\, dV = 0. \tag{10}$$

От наложения добавочных ограничений на возмущение плотности минимум может только увеличиться. Поэтому, если уменьшать радиус шара, внутри которого возмущение плотности будет отлично от нуля (тогда как вне его газ остается невозмущенным), то минимум выражения (9) будет увеличиваться и, как можно показать, увеличиваться непрерывно и неограниченно. Следовательно, если этот минимум для всего газа меньше единицы, то для некоторого шара радиуса $R' < R$ он будет единицей. Уравнение Эйлера для этого случая будет

$$\nabla^2 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) + \rho = 0 \tag{11}$$

с граничным условием (неизменность массы при возмущении) при $r = R$

$$(\rho/\rho_0)' = 0. \tag{12}$$

Легко видеть, что это уравнение получается варьированием ρ_0 в уравнении (3), если положить $\delta\rho_0 = \rho$. Это значит, что если уравнение (11) имеет решение, удовлетворяющее условию (12), то существуют бесконечно близкие друг к другу равновесные распределения плотности, для которых масса внутри шара радиуса R' одинакова, и обратно. Этот критерий неустойчивости физически почти очевиден и имеет общий характер. Оказывается, что для исследования устойчивости нет необходимости рассматривать уравнение Якоби. Достаточно иметь решения уравнения равновесия, что очень облегчает задачу, если приходится прибегать к численному интегрированию.

3. В нашей задаче решение уравнения равновесия (5) зависит от одного параметра, именно, от центральной плотности $\rho_c = \exp \mu_0(0)$. Если при некоторой центральной плотности состояние равновесия неустойчиво, то при некотором $R' < R$ масса $M(R')$ не должна меняться при переходе к другому равновесному распределению с немного измененной центральной плотностью, т. е. производная от левой части (6) по μ_0 или, что то же, по x должна для R' обращаться в нуль. Итак, газ будет иеустойчив, если то значение x, для которого

$$(xu')' = 0, \tag{13}$$

будет меньше $x(R)$. По таблицам Эмдена видно, что функция xu' равна нулю при $x=0$, затем уменьшается до минимума, равного приближенно $-2{,}52\ldots$, при $x=8{,}9\ldots$; возрастает до максимума $-1{,}87\ldots$ при $x \cong 100$ и, осциллируя все слабее и слабее, приближается асимптотически к значению -2.

С помощью (6) и (13) мы, возвращаясь к обычным единицам, видим теперь, что при

$$\alpha = \frac{MG}{RBT_0} > 2{,}52\ldots$$

равновесных состояний вовсе нет. При

$$2{,}52\ldots > \alpha > 1{,}87\ldots$$

существуют по меньшей мере два равновесных состояния, причем из них устойчиво только одно, именно то, для которого

$$R\left[\frac{4\pi G\rho_c}{BT_0}\right]^{1/2} < 8{,}9\ldots \tag{14}$$

Наконец, при $\alpha < 1{,}87\ldots$ существует лишь одно состояние равновесия и это состояние устойчиво.

Поступило
5 II 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. Gamow and G. Keller, Rev. Mod. Phys., **17**, 125 (1945). [2] J. Jeans, Phil. Trans., (A), **199**, 1 (1902); А. Б. Северный, Труды ГАИШ, **13**, 54 (1940). [3] A. S. Eddington, The Internal Constitution of the Stars, Cambridge, 1930. [4] R. C. Tolman, Ap. J., **90**, 541 (1939); А. Сорокина, Диссертация, МГУ; ДАН, **54**, № 8 (1946).