Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVI, № 2

МАТЕМАТИКА

М. И. ВИШИК

МЕТОД ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ ДЛЯ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 10 XI 1946)

В настоящей статье используется метод ортогональных проекций для решения первой, второй и третьей краевых задач для дифференциального уравнения

$$u_{xx}+u_{yy}-(q-a_x-b_y)\,u=0^*. \qquad (1)$$

Предполагается, что $q(x, y)-a(x, y)^2-b(x, y)^2>0$ в области G.

Решение первой краевой задачи, полученное таким образом, в основном совпадает с решением, полученным Курантом [1] прямыми методами вариационного исчисления. Вторая и третья задачи ставятся по-новому и решаются для произвольных ограниченных областей. Метод ортогональных проекций для случая гармонического уравнения применил H. Weyl в работе [2].

Пусть H — гильбертово пространство, элементами которого являются тройки измеримых функций $(f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y))=(f)$ с конечной нормой:

$$((f),(f))=\iint\limits_G [(f_1+af_3)^2+(f_2+bf_3)^2+(q-a^2-b^2)f_3^2]\,dxdy. \qquad (2)$$

При этом $a(x, y)$, $b(x, y)$ — дважды непрерывно дифференцируемые функции, $q(x, y)$ — непрерывно дифференцируемая функция и $q(x, y)-a(x, y)^2-b(x, y)^2>0$ в G.

Заметим, что отсюда следует суммируемость в квадрате функций $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ и $f_3(x, y)$ во всякой внутренней области $G'\subset G$, замыкание которой $\overline{G'}\subset G$.

Определение. Функция $f(x, y)$, определенная в области G, принадлежит классу (A): $f(x, y)\in(A)$, если она абсолютно непрерывна на внутренних по отношению к области G сегментах, лежащих на почти всех прямых, параллельных осям координат и пересекающих область G.

Рассмотрим линейное многообразие $F\subset H$, элементами которого являются тройки функции $(f_x(x, y), f_y(x, y), f(x, y))\in H$, причем $f(x, y)\in(A)$, а $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ — частные производные $f(x, y)$, определенные в тех точках, где они существуют. F полно в метрике (2) и поэтому является подпространством в H.

Пусть Z — подпространство в F, имеющее всюду плотное множество элементов $(\zeta_x(x, y), \zeta_y(x, y), \zeta(x, y))$, причем $\zeta(x, y)$ —

---

* Для простоты изложения мы ограничиваемся случаем двух переменных и таким видом уравнения. Изложенные результаты легко обобщаются на случай общего самосопряженного эллиптического уравнения с любым числом переменных.

дважды непрерывно дифференцируемая функция в G, обращающаяся в нуль в контурной полоске области G. Найдем ортогональное дополнение U подпространства Z в F. Допустим, что элемент $(u_x(x, y),\ u_y(x, y),\ u(x, y)) \in U \subset F$. Для любого элемента $(\zeta_x, \zeta_y, \zeta)$ указанного всюду плотного множества имеем

$$0 = ((u),\ (\zeta)) =$$

$$= \iint_G [(u_x + au)(\zeta_x + a\zeta) + (u_y + bu)(\zeta_y + b\zeta) + (q - a^2 - b^2)u\zeta]\, dxdy =$$

$$= \iint_G (u_x\zeta_x + u_y\zeta_y + au_x\zeta + au\zeta_x + bu_y\zeta + bu\zeta_y + qu\zeta)\, dxdy =$$

$$= \iint_G u\,[-\zeta_{xx} - \zeta_{yy} + (q - a_x - b_y)\zeta]\, dxdy +$$

$$+ \iint_G \left(\frac{\partial(\zeta_x u)}{\partial x} + \frac{\partial(\zeta_y u)}{\partial y} + \frac{\partial(au\zeta)}{\partial x} + \frac{\partial(bu\zeta)}{\partial y}\right) dxdy. \qquad (3)$$

Формула (3) вытекает из того, что в области, в которой $\zeta(x, y) \neq 0$, $u(x, y)$, $u_x(x, y)$, $u_y(x, y)$ суммируемы в квадрате. Применяя теорему Фубини к отдельным членам последнего интеграла и учитывая обращение в нуль вблизи контура функции $\zeta(x, y)$, получим

$$\iint_G \left(\frac{\partial(\zeta_x u)}{\partial x} + \frac{\partial(\zeta_y u)}{\partial y} + \frac{\partial(au\zeta)}{\partial x} + \frac{\partial(bu\zeta)}{\partial y}\right) dxdy = 0. \qquad (4)$$

Из (3) и (4) следует:

$$\iint_G u\,[\Delta\zeta - (q - a_x - b_y)\zeta]\, dxdy = 0. \qquad (5)$$

Исходя из формулы (5), доказывается, что функция $u(x, y)$ равна почти всюду дважды непрерывно дифференцируемой функции.

Интегрируя (5) по частям, получим:

$$\iint_G \zeta\,[\Delta u - (q - a_x - b_y)u]\, dxdy = 0, \qquad (6)$$

откуда следует:

$$\Delta u - (q - a_x - b_y)u = 0. \qquad (7)$$

Итак, мы получили следующее ортогональное разложение пространства F

$$F = U \oplus Z, \qquad (8)$$

где U состоит из элементов (u_x, u_y, u), для которых $u(x, y)$ есть решение уравнения (7).

Разложение (8) эквивалентно решению обобщенной задачи Дирихле, которая ставится следующим образом: задается элемент $(f_x, f_y, f) \in F$; ищется элемент $(u_x, u_y, u) \in U$, для которого

$$(f_x, f_y, f) - (u_x,\ u_y,\ u) = (\zeta_x,\ \zeta_y,\ \zeta). \qquad (9)$$

Решение поставленной задачи получается сразу, если взять проекцию элемента $(f_x,\ f_y,\ f)$ на подпространство U.

Обозначим через Ψ^0 подпространство, имеющее всюду плотным множеством элементы $(\psi_1^0, \psi_2^0, \psi_3^0)$, компоненты которых суть непрерывно дифференцируемые функции в области G, обращающиеся в нуль в контурной полоске и удовлетворяющие соотношению

$$\frac{\partial\psi_1^0}{\partial x}+\frac{\partial\psi_2^0}{\partial y}+\frac{\partial(a\psi_3^0)}{\partial x}+\frac{\partial(b\psi_3^0)}{\partial y}-a\psi_1^0-b\psi_2^0-q\psi_3^0=0. \qquad (10)$$

Оказывается, что ортогональным дополнением к Ψ^0 в H является подпространство F:

$$H=F\oplus\Psi^0. \qquad (11)$$

На основе (8) и (11) получаем:

$$H=U\oplus Z\oplus\Psi^0. \qquad (12)$$

Обозначим ортогональную сумму U и Ψ^0 через Ψ:

$$\Psi=U\oplus\Psi^0. \qquad (13)$$

Подпространство Ψ имеет всюду плотным множеством элементы (ψ_1, ψ_2, ψ_3), компоненты которых непрерывно дифференцируемы в G и удовлетворяют соотношению (10). Обобщенная смешанная задача или, в случае $a=b=0$, обобщенная задача Неймана ставится следующим образом: задается элемент $(\psi_1, \psi_2, \psi_3)\in\Psi$, компоненты которого непрерывно дифференцируемы в G; ищется элемент $(u_x, u_y, u)\in U$ такой, что

$$(\psi_1, \psi_2, \psi_3)-(u_x, u_y, u)=(\psi_1^0, \psi_2^0, \psi_3^0)\in\Psi^0. \qquad (14)$$

Решение так поставленной задачи получается сразу на основании разложения (13), если взять проекцию элемента (ψ_1, ψ_2, ψ_3) на подпространство U. Из (11) следует, в частности, что для любого гладкого элемента* $(f_x, f_y, f)\in F$

$$0=((\psi_1^0, \psi_2^0, \psi_3^0), (f_x, f_y, f))=$$

$$=\iint\limits_G[(f_x+af)(\psi_1^0+a\psi_3^0)+(f_y+bf)(\psi_2^0+b\psi_3^0)+(q-a^2-b^2)f\psi_3^0]\,dxdy=$$

$$=\lim_{i\to\infty}\iint\limits_{G_i}(f_x\psi_1^0+f_y\psi_1^0+af_x\psi_3^0+a\psi_1^0f+bf_y\psi_3^0+bf\psi_2^0+qf\psi_3^0)\,dxdy=$$

$$=\lim_{i\to\infty}\iint\limits_{G_i}\left[\frac{\partial(f\psi_1^0)}{\partial x}+\frac{\partial(f\psi_2^0)}{\partial y}+\frac{\partial(a\psi_3^0f)}{\partial x}+\frac{\partial(b\psi_3^0f)}{\partial y}\right]dxdy-$$

$$-\iint\limits_{G_i}f\left[\frac{\partial\psi_1^0}{\partial x}+\frac{\partial\psi_2^0}{\partial y}+\frac{\partial(a\psi_3^0)}{\partial x}+\frac{\partial(b\psi_3^0)}{\partial y}-a\psi_1^0-b\psi_2^0-q\psi_3^0\right]dxdy=$$

$$=\lim_{i\to\infty}\int\limits_{\Gamma_i}f(s)\,[\psi_1^0\cos(nx)+\psi_2^0\cos(ny)+\psi_3^0(a\cos(nx)+b\cos(ny))]\,ds, \qquad (15)$$

где G_i — последовательность областей, ограниченных гладкими контурами Γ_i, стремящаяся к области G изнутри.

---

* Т. е. такого элемента, для которого $f(x,y)$ — непрерывно дифференцируемая функция.

Из (14) и (15) следует, что

$$\lim_{i\to\infty}\int\limits_{\Gamma_i}\left[\frac{\partial u}{\partial n}+u\,(a\cos(nx)+b\cos(ny))\right]f(s)\,ds=$$

$$=\lim_{i\to\infty}\int\limits_{\Gamma_i}[\psi_1\cos(nx)+\psi_2\cos(ny)+\psi_3(a\cos(nx)+b\cos(ny))]f(s)\,ds \quad (16)$$

для любого гладкого элемента $(f_x,\ f_y,\ f)\in F$.

Последняя формула показывает, в каком смысле решается методом ортогональных проекций смешанная задача для произвольных ограниченных областей G, если за „краевое условие" принять элемент $(\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3)\in\Psi$: выражение $\frac{\partial u}{\partial n}+u\,(a\cos(nx)+b\cos(ny))$ на любой последовательности контуров Γ_i, стремящихся изнутри к границе области G, ведет себя в слабом смысле при $i\to\infty$ так же, как выражение $\psi_1\cos(nx)+\psi_2\cos(ny)+\psi_3(a\cos(nx)+b\cos(ny))$.

Поступило
10 XI 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, II, гл. VII.
[2] H. Weyl, Duke J., 7, 411 (1940).