Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 1

МАТЕМАТИКА

В. РОХЛИН

О КЛАССИФИКАЦИИ ИЗМЕРИМЫХ РАЗБИЕНИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 24 III 1947)

1. Здесь будет дана классификация измеримых разбиений и гомоморфизмов пространств Лебега. Необходимые определения читатель найдет в $n°n°$ 2—10, результаты классификации — в $n°n°$ 11 и 12. Для сравнения с $n°n°$ 4 и 5 укажу на [1], с $n°$ 10 — на [2, 3, 4], с $n°$ 6 (теорема о взаимно однозначных mod 0 гомоморфизмах) — на [5]. Определение независимости ($n°$ 9) заимствовано из теории вероятностей [2].

2. Мера есть вещественная неотрицательная вполне аддитивная функция μ, определенная на борелевском теле Ω_μ подмножеств некоторого основного множества M — пространства с мерой — и удовлетворяющая следующим условиям: a) $M \in \Omega_\mu$ и $\mu M = 1$ и b) множества меры нуль обладают только измеримыми подмножествами. Множества тела Ω_μ называются измеримыми. Всякое подмножество A пространства M с мерой, не являющееся множеством меры нуль, становится само таким же пространством (подпространством пространства M), если ввести в нем меру μ_A, считая измеримыми множества вида $Y = XA$, где $X \in \Omega_\mu$, и полагая для них $\mu_A Y = \frac{\mu_e Y}{\mu_e A}$; при этом $\mu_e Z$ есть внешняя мера множества $Z \subset M$, т. е. нижняя грань мер содержащих Z измеримых множеств. Измеримая функция и интеграл определяются как обычно.

3. Два объекта S и S', определенные в пространствах с мерами M и M' или в системах $\{M_\alpha\}$ и $\{M'_\alpha\}$ таких пространств (объектами могут быть сами системы $\{M_\alpha\}$ и $\{M'_\alpha\}$, системы определенных в них подмножеств, разбиений, отображений и функций), тождественны по модулю нуль (mod 0), если они становятся тождественными после удаления из этих пространств подходящих множеств меры нуль. Вообще, выражение „mod 0“ в предложении, касающемся объекта S, означает, что это предложение справедливо для некоторого объекта S', тождественного mod 0 с S. Соответствие между точками двух пространств M и M' с мерой изоморфно, если оно взаимно однозначно и переводит каждое измеримое множество каждого из этих пространств в измеримое множество той же меры. Два объекта S и S', определенные в системах $\{M_\alpha\}$ и $\{M'_\alpha\}$, изоморфны, если существует система изоморфных соответствий T_α, связывающих M_α с M'_α, которая переводит эти объекты друг в друга. Если изоморфизм получается после удаления из соответствующих пространств подходящих множеств меры нуль, то, в соответствии с нашим общим определением, мы говорим об изоморфизме mod 0. Это понятие наиболее важно. Оно приводит обычным путем к поня-

тию инвариантов объекта, к понятию типа объекта и к задаче классификации тех или иных объектов.

4. Пространство M сепарабельно, если существует счетная система $\Delta \subset \Omega_\mu$, обладающая двумя свойствами: a) для всякого $A \in \Omega_\mu$ можно указать содержащее A и тождественное mod 0 с A множество B, принадлежащее к порожденному системой Δ борелевскому телу $\mathfrak{B}\Delta$, и b) для любой пары $x, y \in M$ можно указать такое $D \in \Delta$, что либо $x \in D$, $y \bar{\in} D$, либо $x \bar{\in} D$, $y \in D$. Базис сепарабельного пространства есть счетная система $\Delta \subset \Omega_\mu$, обладающая обоими свойствами a) и b). Подпространства сепарабельного пространства сепарабельны.

5. Сепарабельное пространство M полно относительно своего базиса $\Delta = \{D_\alpha\}$, если все пересечения $\bigcap_\alpha E_\alpha$, где E_α есть одно из двух множеств D_α, $M - D_\alpha$, непусты (и, следовательно, одноточечны). Если M полно mod 0 относительно некоторого своего базиса, то оно полно mod 0 и относительно всякого другого своего базиса. Сепарабельные пространства, полные mod 0 относительно своих базисов, называются в дальнейшем пространствами Лебега. Подпространство пространства Лебега в том и только в том случае есть пространство Лебега, если оно, как множество, измеримо. Вообще, свойство сепарабельного пространства быть пространством Лебега эквивалентно абсолютной измеримости, т. е. измеримости во всяком объемлющем сепарабельном пространстве. Последняя наверное имеет место, если M измеримо хотя бы в одном пространстве Лебега, например, в своем пополнении $\tilde{M}(\Delta)$, которое может быть построено с помощью любого базиса Δ. Точки пространства $\tilde{M}(\Delta)$ суть последовательности $\tilde{e} = (E_\alpha)$ (см. начало этого n°), мера $\tilde{\mu}$ определяется в $\tilde{M}(\Delta)$ первоначально для множеств вида $\bigcap_{k=1}^{m} \tilde{D}_{\alpha_k}$, где $\tilde{D}$ состоит из последовательностей $\tilde{e} \in \tilde{M}(\Delta)$ с $E_\alpha = D_\alpha$, формулой $\tilde{\mu}\left(\bigcap_{k=1}^{m} \tilde{D}_{\alpha_k}\right) = \mu\left(\bigcap_{k=1}^{m} D_{\alpha_k}\right)$, а затем продолжается обычным способом. При естественном вложении M в $\tilde{M}(\Delta)$ оказывается, что $\tilde{\mu}_e M = 1$, так что M либо тождественно mod 0 с $\tilde{M}(\Delta)$, либо неизмеримо в $\tilde{M}(\Delta)$. Если Δ есть счетная система измеримых подмножеств пространства Лебега, то a) есть следствие b). Точки положительной меры образуют в M не более чем счетное множество, и их меры могут быть занумерованы в невозрастающую последовательность $m_1(M)$, $m_2(M), \ldots$; если имеется только p точек положительной меры, то при $n > p$ по определению $m_n(M) = 0$. При этом M оказывается изоморфным mod 0 отрезку $(0, m_0)$, где $m_0 = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} m_n(M)$, с обычной мерой Лебега, к которому присоединена последовательность точек с мерами $m_n(M)$. Мера μ непрерывна, если $m_1(M) = m_2(M) = \ldots = 0$.

6. Отображение одного пространства Лебега в другое гомоморфно, если: 1) оно однозначно и 2) прообраз любого измеримого множества измерим и имеет меру своего образа. Тогда и образ любого измеримого множества измерим; в частности, взаимно однозначный гомоморфизм есть изоморфизм.

7. Пусть ζ — разбиение пространства Лебега M на непересекающиеся множества C. Множества, являющиеся суммами множеств C, обозначаются как ζ-множества. Разбиение ζ измеримо, если существует счетная система Δ измеримых ζ-множеств (базис разбиения ζ), обладающая следующим свойством: для любой пары C, C'

элементов разбиения можно указать такое $D \in \Delta$, что либо $C \subset D$, $C' \subset M - D$, либо $C \subset M - D$, $C' \subset D$. Если Δ есть базис разбиения ζ, то для всякого измеримого ζ-множества A существует содержащее его и тождественное mod 0 с ним множество $B \in \mathfrak{B}\Delta$.

8. Каждому гомоморфизму пространства M отвечает определенное измеримое разбиение этого пространства, именно, разбиение на множества, являющиеся прообразами точек. Обратно, каждому измеримому разбиению ζ пространства M отвечает гомоморфизм этого пространства, именно, естественный гомоморфизм в фактор-пространство M/ζ, состоящее из элементов разбиения ζ. Этот гомоморфизм относит каждой точке пространства M тот элемент разбиения ζ, к которому она принадлежит. Множество $X \subset M/\zeta$ считается измеримым, если измерим его прообраз, и его мера $\mu_\zeta X$ равна по определению мере этого прообраза. Фактор-пространства пространств Лебега по их измеримым разбиениям суть также пространства Лебега. Естественными гомоморфизмами на фактор-пространства исчерпываются, с точностью до изоморфных отображений пространств образов, все гомоморфизмы пространств Лебега.

9. Мы пишем $\zeta' \leqslant \zeta$, если каждый элемент разбиения ζ' есть ζ-множество. Это отношение превращает множество всех разбиений пространства M в (полную) структуру. При этом измеримые разбиения не образуют структуры, но при переходе к классам тождественных mod 0 измеримых разбиений снова получается полная структура. В частности, для всякого разбиения ζ существует такое измеримое разбиение ζ' (измеримая оболочка разбиения ζ), что: 1) mod 0 $\zeta' \leqslant \zeta$ и 2) если ζ'' измеримо и mod 0 $\zeta'' \leqslant \zeta$, то mod 0 $\zeta'' \leqslant \zeta'$. Измеримая оболочка определяется mod 0 однозначно, т. е. всякие две измеримые оболочки одного и того же разбиения mod 0 тождественны. Измеримые разбиения ζ и ζ' независимы, если для всякого измеримого ζ-множества A и всякого измеримого ζ'-множества A' $\mu(AA') = \mu A \cdot \mu A'$. Если, сверх того, mod 0 все пересечения CC', где C — произвольный элемент ζ, а C' — произвольный элемент ζ', одноточечны, то ζ и ζ' суть независимые дополнения друг друга.

10. Система мер μ_C, определенных в элементах C измеримого разбиения ζ, есть принадлежащая ζ каноническая система, если: 1) все mod 0 C суть пространства Лебега и 2) каково бы ни было измеримое множество $X \subset M$, все mod 0 множества XC измеримы относительно своих мер μ_C, $\mu_C(XC)$ есть измеримая функция на фактор-пространстве M/ζ и

$$\mu X = \int\limits_{M/\zeta} \mu_c(XC)\, d\mu_\zeta .$$

Всякое измеримое разбиение обладает канонической системой мер, которая определяется им mod 0 однозначно. Если для некоторого C $\mu C > 0$, то мера μ_C совпадает с той, которая определена в $n^\circ 2$.

11. Последовательность инвариантов $m_n(C)$, отвечающих элементам C измеримого разбиения ζ как пространствам Лебега (см. $n^\circ 5$), можно рассматривать как последовательность функций m_n, определенных на фактор-пространстве M/ζ. Функции m_n измеримы, и для всех mod 0 $C \in M/\zeta$

$$m_n(C) \geqslant 0, \quad m_n(C) \geqslant m_{n+1}(C), \quad \sum_{n=1}^{\infty} m_n(C) \leqslant 1. \qquad (*)$$

Тип (см. $n^\circ 3$) $\tau(\mathfrak{m}_\zeta)$ последовательности $\mathfrak{m}_\zeta = \{m_n\}$ является инвариантом разбиения ζ, и оказывается, что если $\tau(\mathfrak{m}_\zeta) = \tau(\mathfrak{m}_{\zeta'})$, то ζ и ζ

изоморфны. При этом, каков бы ни был тип τ последовательности измеримых функций, определенных на некотором пространстве Лебега и удовлетворяющих всюду mod 0 условиям ($*$), всегда существует такое измеримое разбиение ζ некоторого пространства Лебега M, что $\tau(m_\zeta)=\tau$. В частности, ζ в том и только в том случае обладает независимым дополнением, если все mod 0 пространства C изоморфны. Если мера μ_ζ непрерывна и все mod 0 меры μ_C непрерывны, то ζ изоморфно разбиению квадрата на отрезки, параллельные одной из его сторон.

12. Так как необходимым и достаточным условием изоморфизма двух гомоморфизмов пространства Лебега является изоморфизм соответствующих измеримых разбиений, то приведенные результаты дают также полную классификацию гомоморфизмов пространств Лебега.

Поступило
24 III 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] P. R. Halmos, J. v. Neuman, Ann. of Math., (2) 43, 332 (1942). [2] А. Н. Колмогоров, Основные понятия теории вероятностей, 1936. [3] P. R. Halmos, Duke Math. J., 8, 386 (1941). [4] W. Ambrose, P. R. Halmos, S. Kakutani, Duke Math. J., 9, 43 (1942). [5] J. v. Neumann, Ann. of Math., 33, 574 (1932).